Matematika III – 2. přednáška
Funkce více proměnných: limita, spojitost, derivace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

22. 9. 2014

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple*, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

V diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se (jak už název napovídá) zabývali zobrazeními

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak příslušné pojmy zobecnit pro případ zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Zabývat se budeme především dvěma speciálními případy:

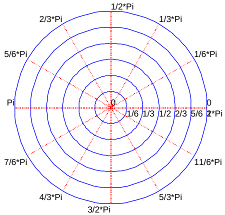
- $n=1$ – funkce více proměnných
- $m=1$ – křivka v prostoru $\mathbb{R}^n$

Zobrazení

Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \to E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc", může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic je invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Příklad

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x.



Přechod z polárních souřadnic do standardních je

$$P_{\text{polární}} = (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = P_{\text{kartézské}}$$

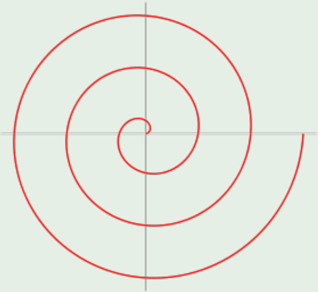
Graf funkce můžeme také vnímat jako obraz zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Funkce jedné proměnné v polárních souřadnicích

Jak už jsme podotkli, kartézské souřadnice jsou nejběžnější, ale nikoliv jediné možné. Mnohé „objekty“ mají např. v polárních souřadnicích výrazně jednodušší vyjádření (toho využijeme i později zejména pro výpočty obsahů či objemů takových objektů).

Příklad

Archimedova spirála má v polárních souřadnicích rovnici $r(\varphi) = a + b\varphi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry.



Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v „nevlastních“ bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již 2^n).
Má-li mít funkce v daném bodě limitu, *nesmí záležet na „cestě“*, po které k danému bodu konvergujeme (analogie limit zleva a zprava u funkcí jedné proměnné).

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a]*,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)+d\cdot g(x)) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x) + d\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*
- *je-li* $\lim_{x\to a} f(x)=0$ *a funkce* $g(x)$ *je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu* a*, pak*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0,0)$.

Řešení

Viz cvičení.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bodě $(0,0)$.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0,0)$.

Příklady k procvičení

Příklad

Vypočtěte limity nebo dokažte jejich neexistenci.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,

c) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.

Spojitost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v bodě a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Věta (Weierstrassova)

Spojitá funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené **souvislé** *množině A. Jsou-li $a, b \in A$ takové, že $f(a) < 0 < f(b)$, pak existuje $c \in A$ tak, že $f(c) = 0$.*

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ *parciální derivaci podle proměnné* x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$).

Podobně jako v případě jedné proměnné, pokud má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké otevřené množiny, jsou tyto derivace rovněž funkcemi z E_n do $\mathbb{R}$.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Příklad

Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } \mathrm{x{=}0} \textit{ nebo } \mathrm{y{=}0} \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ obě parciální derivace nulové, přitom v tomto bodě neexistuje limita, a tedy není ani spojitá.