Matematika III – 3. přednáška
Funkce více proměnných: směrové derivace, diferenciál, derivace vyšších řádů

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

29. 9. 2014

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Parciální derivace – připomenutí

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \ldots, x_n^*]$ *parciální derivaci podle proměnné* x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$).

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Příklad

Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } x{=}0 \textit{ nebo } y{=}0 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ obě parciální derivace nulové, přitom v tomto bodě neexistuje limita, a tedy není ani spojitá.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

Speciální volbou jednotkových vektorů ve směru souřadných os dostáváme právě *parciální derivace funkce* f.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Poznámka

Neplatí ale aditivita vzhledem ke směrům:
$d_{u+v} f(x) \neq d_u f(x) + d_v f(x)$.
Rovněž je vidět z výše uvedené věty, že směrová derivace nezávisí jen na „směru“ vektoru, ale i na jeho velikosti.

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0)=0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách“ dostáváme různé limity).

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ v bodě $[-1,1]$ ve směru vektoru $(1,2)$.

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.
Ukázali jste si, že diferenciál závislé proměnné dy je **lineární funkcí** diferenciálu nezávislé proměnné dx, splňující

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Formálně říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v x_0, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

(Přitom z definice derivace snadno plyne, že pak $A = f'(x_0)$.)

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definice

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\Big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v\Big) = 0.$$

Lineární funkci *df* definovanou předpisem $v \mapsto a \cdot v$ (závislou na vektorové proměnné v) nazýváme *diferenciál funkce* f.

V literatuře se často také říká *totální diferenciál* df funkce f.

Diferenciál – shrnutí

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je tedy *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

1. v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $v \mapsto d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v
3. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|} \big(f(x+v) - f(x) - d_v f(x) \big)$,
   tj. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|} \big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v \big)$.

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již konečně dostáváme **spojitost:**

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne $f(x+v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v \to 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.
Proto:

$$\lim_{v \to 0} \big(f(x+v) - f(x)\big) = \lim_{v \to 0} \big(a \cdot v + \tau(v)\big) = 0,$$

a tedy

$$\lim_{v \to 0} f(x+v) = f(x).$$

□

Příklad

Přímo z definice určete df a funkci τ pro $f(x,y)=x^2+y^2$ v obecném bodě $[x^*,y^*]$.

Řešení

Kvůli přehlednosti označme $h := \mathrm{d}x$, $k := \mathrm{d}y$. Pak

$$\begin{aligned} f(x^*+\mathrm{d}x, y^*+\mathrm{d}y) - f(x^*,y^*) = \\ &= (x^*+h)^2+(y^*+k)^2-(x^*)^2-(y^*)^2 = \\ &= 2x^*h+2y^*h+h^2+k^2. \end{aligned}$$

Odtud $\mathrm{d}f(x^*,y^*)(h,k) = 2x^*\cdot h + 2y^*\cdot k$ a $\tau(h,k)=h^2+k^2$.

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x, pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = \mathrm{d}f(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Důkaz:

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+tv) - f(x)\big) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(\mathrm{d}f(x)(tv) + \tau(tv)\big) =$$
$$= \mathrm{d}f(x)(v) + \|v\| \lim_{t \to 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = \mathrm{d}f(x)(v) = a \cdot v.$$

Poznámka

Z předchozího je ihned vidět, že vektor parciálních derivací $f'(x)$ je přímo roven vektoru a.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $\mathrm{d}f : E_2 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (*)$$

a platí:

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál $\mathrm{d}f$ v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí $(*)$.

Příklady k procvičení

Příklad

Určete diferenciál v daném bodě:

a) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ v bodě $[1,1]$,

b) $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $[1,\sqrt{3}]$.

Příklad

Spočtěme znovu jednodušeji dřívější příklad a určeme směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ v bodě $[-1,1]$ ve směru vektoru $(1,2)$ pomocí diferenciálu.

Přibližné výpočty

Podobně jako v případě diferenciálu funkcí jedné proměnné lze i diferenciál funkce více proměnných využít k (velmi) přibližným výpočtům.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočteme $e^{0{,}05^3-0{,}02}$.

Řešení

Využijeme diferenciál funkce $f(x,y)=e^{x^3+y}$ v bodě $x=[0,0]$ s diferencemi $v=(0{,}05;-0{,}02)$. Máme

$$df(x,y)=e^{x^3+y}\cdot 3x^2\,dx+e^{x^3+y}\,dy,$$

a tedy $df(0,0)=0\,dx+1\,dy$, což celkem dává odhad $e^{0{,}05^3-0{,}02}=f(0{,}05;-0{,}02)\approx f(0,0)+df(0{,}05;-0{,}02)=1-0{,}02=0{,}98$.

Příklady k procvičení

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$,

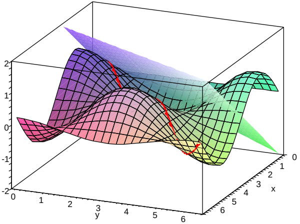
b) $1{,}04^{2{,}02}$.

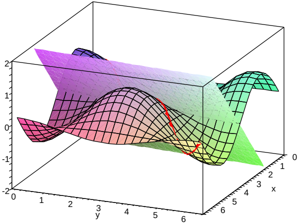
Tečná nadrovina ke grafu funkce

Pro $f : E_2 \to \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející bodem (x_0, y_0), ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí *tečná rovina* ke grafu funkce f. Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.





Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}. Tato nadrovina

1. prochází bodem $(x, f(x))$
2. její zaměření je grafem lineárního zobrazení $\mathrm{d}f(x) : E_n \to \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Příklady k procvičení

Příklad

Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce v daném bodě:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2, \quad [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 4]$,

b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad [x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?]$.