

Matematika III – 4. přednáška
Funkce více proměnných: Derivace vyšších řádů,
Taylorův polynom, extrémy funkcí

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

6. 10. 2014

Obsah přednášky

- 1 Diferenciál funkcí více proměnných
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce
- 2 Derivace vyšších řádů, Taylorova věta
 - Parciální derivace vyšších řádů
 - Hessián – aproximace 2. řádu
 - Taylorova věta
- 3 Lokální a absolutní extrémy funkcí více proměnných
 - Lokální extrémy
 - Absolutní (globální) extrémy

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple*, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- Silvie Kuráňová, Jan Vondra, *Diferenciální počet funkcí více proměnných - interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*, PŘF MU, 2009, <http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps09/sbirka/web/index.html>
- *Předmětové záložky v IS MU*

Tečná nadrovina ke grafu funkce

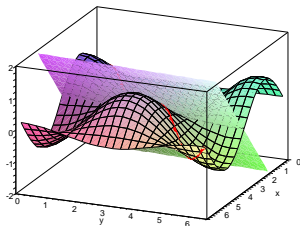
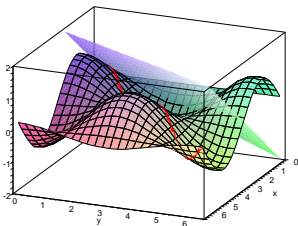
Pro $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3 :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející bodem (x_0, y_0) , ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek

$$c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

Říkáme jí *tečná rovina* ke grafu funkce f . Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.



Obecně pro $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1} .
Tato nadrovina

- 1 prochází bodem $(x, f(x))$
- 2 její zaměření je grafem lineárního zobrazení $df(x) : E_n \rightarrow \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Příklady k procvičení

Příklad

Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce v daném bodě:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, ?]$,

b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?]$.

Parciální derivace vyšších řádů

Pro pevný vektor přírůstku $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět operace na funkcích $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = df(v).$$

Výsledkem je $df(v) : E_n \rightarrow \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme tento proces opakovat.

Pro **parciální derivace druhého řádu** píšeme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_i}\right)f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

v případě opakované volby $i = j$ píšeme také

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \frac{\partial}{\partial x_i}\right)f = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme
o **parciálních derivacích k -tého řádu**

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Věta (Schwarzova)

Nechť $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je k -krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.

Speciálně tedy pro $n = 2$ platí (při alternativním způsobu zápisu parciálních derivací):

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Taylorův polynom funkce jedné proměnné – opakování

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí *lineárního polynomu* slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o *Taylorově polynomu*.

Definice

Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, \dots , $f^{(n)}(x_0)$ funkce $f(x)$ až do řádu n . *Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0* je polynom

$$T(x) = T_n(x) = T_n^f(x) = T_n^f(x; x_0)$$

definovaný jako

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Taylorova věta pro funkce jedné proměnné

Věta

Nechť $f(x)$ má spojité derivace $f'(x)$, $f''(x)$, \dots , $f^{(n)}(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť existuje vlastní derivace $f^{(n+1)}(x)$ na otevřeném intervalu (a, b) . Potom pro každý bod $x \in (a, b)$ existuje bod $c \in (a, x)$ tak, že platí rovnost

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{kde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě a .

Definice

Je-li $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce v bodě x , nazýváme symetrickou matici

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

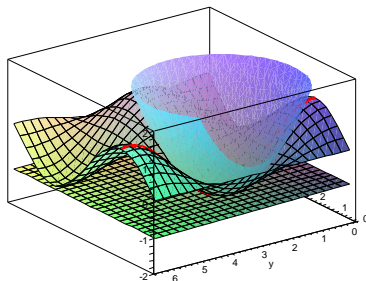
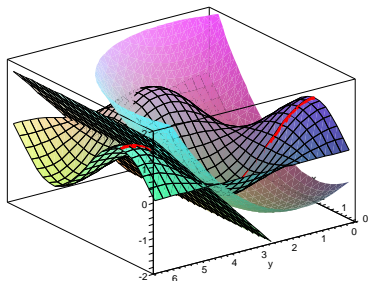
Hessovou maticí (příp. Hessiánem) funkce f v bodě x . Často bývá Hessián značen $f''(x)$.

Poznámka

Analogicky jako v případě parciálních derivací lze definovat i směrové derivace vyšších řádů v bodě $x \in E_n$. Pak platí (za předpokladu spojitosti jedné ze stran v x)

$$f_{uv}(x) = f_{vu}(x) = u^T Hf(x)v = (Hf(x)u) \cdot v.$$

Použití Hessiánu připomíná Taylorovu v. jedné proměnné!



Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$.

Obecně pro funkce $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$, body $x = [x_1, \dots, x_n] \in E_n$ a přírůstky $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ klademe

$$d^k f(x)(v) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Taylorova věta

Taylorova věta pro funkci jedné proměnné aproximovala danou funkci v okolí bodu x_0 *Taylorovým polynomem*, přičemž zároveň udávala chybu, jíž se při tomto odhadu dopouštíme.

U funkcí více proměnných je situace podobná, pouze formálně složitější.

Definice

Taylorovým polynomem funkce f stupně m (se středem) v bodě x^* nazýváme polynom (více proměnných), který má s funkcí f stejnou funkční hodnotu v daném bodě x^* a stejnou hodnotu všech parciálních derivací až do řádu m včetně.

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě x^ a nějakém jeho okolí spojitě parciální derivace až do řádu $m + 1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:*

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

kde

$$T_m(x) = f(x^*) + df(x^*)(v) + \frac{1}{2} d^2f(x^*)(v) + \cdots + \frac{1}{m!} d^m f(x^*)(v),$$

resp.

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1}f(x^* + \theta v)(v), \quad \theta \in (0, 1),$$

je Taylorův polynom, resp. zbytek v Taylorově vzorci a $v = x - x^$ je vektor diferencí.*

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Výraz třetího řádu

$$d^3 f(x, y)(\xi, \eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \xi^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \xi^2 \eta + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \xi \eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \eta^3$$

a obecně

$$d^k f(x, y)(\xi, \eta) = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-\ell} \partial y^\ell} \xi^{k-\ell} \eta^\ell.$$

Poznámka

Uvedené výrazy vám snad připomínají *binomickou větu*. Tak si je lze rovněž „neformálně“ zapamatovat:

$$d^k f(x, y)(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \xi + \frac{\partial}{\partial y} \eta \right)^k,$$

přičemž j -té mocniny nahrazujeme j -tými parciálními derivacemi.

Aproximace

Taylorova věta nám (stejně jako v jednorozměrném případě) dává lepší možnosti aproximace funkcí v okolí bodu než pouhý diferenciál.

Přesnost výpočtu samozřejmě přímo ovlivní i volba funkce, jejíž hodnoty budeme aproximovat.

Příklad

Pomocí Taylorovy věty přibližně vypočteme $e^{0,05^3 - 0,02}$.

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x, y) = e^{x^3+y}$ v bodě $[0, 0]$ s diferenciemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

Parciální derivace jsou:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^3+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$$

$$e^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^3+y}.$$

Pak

$$T_2(0 + \xi, 0 + \eta) =$$

$$= f(0, 0) + df(0, 0) \cdot (\xi, \eta) + (\xi, \eta) \cdot \frac{1}{2} d^2f(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \eta + \frac{1}{2}\eta^2.$$

Odtud dostáváme odhad

$$e^{0,05^3-0,02} \approx 1 - 0,02 + \frac{1}{2}0,02^2 = 0,9802.$$

Příklady k procvičení

Příklad

Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem v daném bodě:

a) $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$,

b) $x^{\frac{y}{z}}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1]$.

Příklad

Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtete

a) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$,

b) $\ln(x^2 + y^2 + 1)$ v bodě $[1, 1; 1, 2]$.

Lokální extrémy funkcí více proměnných

Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí U takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f , ve kterém je diferenciál $df(x)$ nulový, nazýváme **stacionární bod funkce f** .

Nutnou podmínkou pro existenci maxima nebo minima v bodě x^* (v případě diferencovatelnosti funkce f v x^*) je **vymizení diferenciálu v tomto bodě, tj. $df(x^*) = 0$** . Skutečně, pokud je $df(x^*) \neq 0$, pak existuje směr v , ve kterém je $d_v f(x^*) \neq 0$. Pak ovšem nutně podél přímky $x^* + tv$ na jednu stranu od bodu x^* hodnota funkce roste a na druhou klesá.

Příklad

Funkce $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

má v počátku ostré lokální maximum (přitom zde není spojitá, a tedy ani diferencovatelná).

Příklad

Funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je v počátku spojitá a má zde ostré lokální minimum, přestože v tomto bodě není diferencovatelná (grafem funkce je kuželová plocha – viz první přednáška).

Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.

Přitom ale (podobně jako u funkcí jedné proměnné) stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.

Např. funkce $f(x, y) = (x - x_0)(y - y_0)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ stacionární bod ($df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (y - y_0)dx + (x - x_0)dy$), nemá zde však zřejmě lokální extrém (jde o tzv. „sedlo“).

Poznat, jakého typu je daný stacionární bod, nám stejně jako v případě funkcí jedné proměnné umožní (díky Taylorově větě) derivace vyšších řádů.

Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. $f'(x_0) = 0$).

Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v x_0 ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).

Toto tvrzení vyplynulo z Taylorovy věty (stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

kde ξ leží mezi x a x_0 . Ze spojitosti f'' a vlastnosti $f''(x_0) < 0$ pak pro ξ dostatečně blízko x_0 dostáváme $f''(\xi) < 0$ a tedy $R_1(x) < 0$ dostatečně blízko x_0 . Proto zde $f(x) < f(x_0)$ a x_0 je lokálním maximem.

Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ a její stacionární bod x^* (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).

Z Taylorovy věty pak dostáváme (opět stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x^*) + df(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2} d^2f(\xi)(x - x^*) = \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2} d^2f(\xi)(x - x^*), \end{aligned}$$

kde $\xi = x^* + \theta v$ (pro $\theta \in (0, 1)$) leží „mezi“ x a x^* .

Zbývá do více proměnných přeložit podmínku, která říká, že výraz

$$d^2f(\xi)(x - x^*) = (x - x^*)^T Hf(\xi)(x - x^*)$$

je nekladný (resp. nezáporný) pro libovolné x .

Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

Definice

Kvadratická forma $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Často rovněž hovoříme o definitnosti matice A kvadratické formy h (jsou spolu ve vztahu $h(u) = u^T A u = A u \cdot u$).

S těmito pojmy jste se setkali již v části věnované lineárním modelům a měli byste tedy umět rozeznat definitnost kvadratické formy (resp. její matice v dané bázi).

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice A je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A jsou záporné,
- hlavní minory A střídají znaménko, počínaje záporným.

Věta

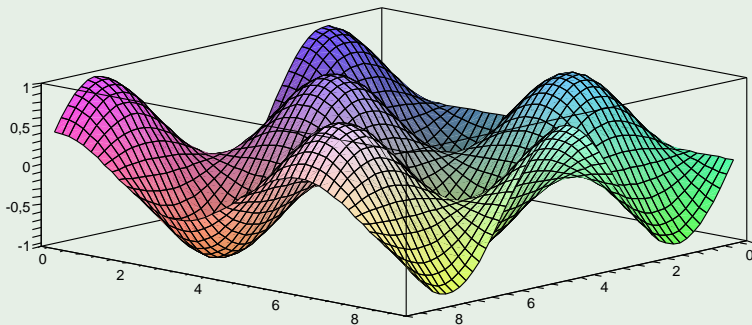
Nechť $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a $x^ \in E_n$ nechť je stacionární bod funkce f . Potom*

- 1 je-li $Hf(x^*)$ pozitivně (negativně) definitní, má f v x^* ostré lokální minimum (maximum),*
- 2 je-li $Hf(x^*)$ indefinitní, nemá f v bodě x^* lokální extrém.*
- 3 má-li f v x^* lokální minimum (maximum), je $Hf(x^*)$ pozitivně (negativně) semidefinitní,*

Všimněme si, že věta nedává žádný výsledek, pokud je hessián funkce ve zkoumaném bodě degenerovaný (nulový). Důvod je opět stejný jako u funkcí jedné proměnné. V takových případech totiž existují směry, ve kterých první i druhá derivace zmizí a my proto v tomto řádu přiblížení neumíme poznat, zda se funkce bude chovat jako t^3 nebo jako $\pm t^4$, dokud nespočteme alespoň v potřebných směrech derivace vyšší.

Příklad

Uvažme funkci $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$, která připomíná známá kartonová plata na vajíčka a spočtěme její lokální extrémy.



Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x, y) = \cos(x) \cos(y), \quad f_y(x, y) = -\sin(x) \sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

- 1 $\cos(x) = 0, \sin(y) = 0$, tj. $[x, y] = [\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$
- 2 $\cos(y) = 0, \sin(x) = 0$, tj. $[x, y] = [k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Druhé parciální derivace jsou

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \cos(y) & -\cos(x) \sin(y) \\ -\cos(x) \sin(y) & -\sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

- 1 $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou různé parity a naopak pro $-$,
- 2 $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou různé parity a naopak pro $-$.

Protože naše funkce má spojitý hessián, který je nedegenerovaný, nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod (x^*, y^*) patří do první skupiny se stejnými paritami k a ℓ . Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima. Naopak, hessián u druhé skupiny bodů se vyčíslí kladně na některých přírůstcích a záporně na jiných. Stejně se proto bude chovat i celá funkce f v okolí těchto stacionárních bodů.

Příklad (Poznámky)

- matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je indefinitní, přestože má oba hlavní minory nekladné (pro semidefinitnost je znaménko minorů pouze nutnou podmínkou!)
- nalezené lokální extrémy šlo jistě najít snadněji úvahou o nabývání hodnot ± 1 funkcí $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$, neměli bychom ale jistotu, že jde o **všechny** extrémy.

Příklady k procvičení

Příklad

Určete stacionární body funkce

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$ a rozhodněte, které z těchto bodů jsou lokálními extrémy a jakého druhu.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f .
V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M , pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ ($f(x^*) \leq f(x)$) pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

Věta

Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Hledání absolutních extrémů funkce na množině tak máme převedeno na nalezení lokálních extrémů (což umíme) a vyšetření hraničních bodů. To je ale často komplikovanější záležitost, které se budeme více věnovat později v části o *vázaných extrémech*.

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M , která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

Řešení

Jediným stacionárním bodem je $[1, 1]$, kde nastává absolutní maximum $f(1, 1) = 1$. Absolutní minimum -12 nastává v hraničních bodech $[4, 0]$ a $[0, 4]$.