Matematika III – 5. přednáška
Zobrazení více proměnných, implicitně definované funkce

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

13. 10. 2014

Obsah přednášky

1. Absolutní (globální) extrémy
2. Zobrazení mezi euklidovskými prostory
   - Zobrazení a transformace
   - „Chain Rule“
   - Věta o inverzním zobrazení
3. Implicitně definovaná zobrazení

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- Silvie Kuráňová, Jan Vondra, Diferenciální počet funkcí více proměnných - interaktivní sbírka příkladů a testových otázek, PřF MU, 2009, `http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps09/sbirka/web/index.html`
- *Předmětové záložky v IS MU*

Obsah první písemky

7. listopadu, 18:00 (D1, D2, D3, A217)

- určování limit, resp. důkaz neexistence, spojitost
- výpočty parciálních a směrových derivací
- použití diferenciálu – aproximace, tečná nadrovina
- využití Taylorovy věty a Hessiánu pro aproximaci
- implicitně definované funkce
- určování lokálních a globálních extrémů.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f.
V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

Věta

Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Hledání absolutních extrémů funkce na množině tak máme převedeno na nalezení lokálních extrémů (což umíme) a vyšetření hraničních bodů. To je ale často komplikovanější záležitost, které se budeme více věnovat později v části o *vázaných extrémech*.

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

Řešení

Jediným stacionárním bodem je $[1,1]$, kde nastává absolutní maximum $f(1,1) = 1$. Absolutní minimum -12 nastává v hraničních bodech $[4,0]$ a $[0,4]$.

Zobrazení mezi euklidovskými prostory

Zobrazení $F : E_n \to E_m$ je při zvolených kartézských souřadnicích na obou stranách obyčejná m–tice

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

funkcí $f_i : E_n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *diferencovatelné* nebo *spojitě* **diferencovatelné zobrazení**, jestliže tuto vlastnost mají všechny funkce $f_1, \dots, f_m$.

Diferencovatelná zobrazení $F : E_n \to E_n$, která mají inverzní zobrazení $G : E_n \to E_n$ definované na celém svém obrazu, se nazývají **(diferencovatelné) transformace**. Příkladem transformace v E_2 je přechod mezi polárními a kartézskými souřadnicemi:

$$[r, \theta] \mapsto [r \cos \theta, r \sin \theta]$$

s inverzí

$$[x, y] \mapsto [\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}], \; [0, y] \mapsto [y, \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y].$$

Lineární zobrazení $\mathrm{d}f_i(x) : E_n \to \mathbb{R}$ lineárně aproximují přírůstky f_i.

Definice

$$D^1F(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1(x) \\ \mathrm{d}f_2(x) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x)$$

se nazývá **Jacobiho matice zobrazení** F v bodě x (a její determinant nazýváme **jacobián**). Lineární zobrazení $D^1F(x)$ definované na přírůstcích $v = (v_1, \dots, v_n)$ pomocí stejně značené Jacobiho matice nazýváme **diferenciál zobrazení** F v bodě x z definičního oboru, jestliže

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(F(x+v) - F(x) - D^1F(x)(v)\big) = \mathbf{0}.$$

Důsledek Věty o existenci diferenciálu pro funkce n proměnných je:

Věta

Nechť $F : E_n \to E_m$ je zobrazení, jehož všechny souřadné funkce mají spojité parciální derivace v okolí bodu $x \in E_n$. Pak existuje diferenciál $D^1F(x)$ zobrazení F zadaný Jacobiho maticí.

Diferenciál složeného zobrazení

Věta („Chain rule“, o derivaci složeného zobrazení)

Nechť $F : E_n \to E_m$ a $G : E_m \to E_r$ jsou dvě diferencovatelná zobrazení, přičemž definiční obor G obsahuje celý obor hodnot F. Pak také složené zobrazení $G \circ F$ je diferencovatelné a jeho diferenciál je v každém bodě z definičního oboru F kompozicí diferenciálů

$$D^1(G \circ F)(x) = D^1 G(F(x)) \circ D^1 F(x).$$

Příslušná Jacobiho matice je dána součinem příslušných Jacobiho matic.

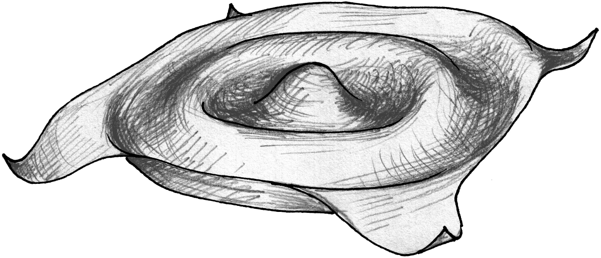
Polární souřadnice vzniknou z kartézských souřadnic transformací $F : E_2 \to E_2$, kterou v souřadnicích $[x, y]$ a $[r, \varphi]$ zapíšeme:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Uvažme funkci $g_t : E_2 \to \mathbb{R}$ zadanou v polárních souřadnicích předpisem

$$g(r, \varphi, t) = \sin(\text{r-t})\,.$$

Funkce nám docela dobře přibližuje vlnění povrchu hladiny po bodovém vzruchu v počátku v čase t (viz obrázek s hodnotou $t = -\pi/2$). Zatímco v polárních souřadnicích bylo snadné ji zadat, v kartézských bychom asi tápali:



Chceme-li vypočítat derivaci funkce zadané parametricky v kartézských souřadnicích, využijeme větu o derivaci složeného zobrazení $g \circ F : E_2 \to \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
D^1(g \circ F)(x) &= D^1 g(F(x)) \circ D^1 F(x) = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,t) = \cos(\sqrt{x^2+y^2} - t)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 0
$$

a podobně

$$
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,t) = \cos(\sqrt{x^2+y^2} - t)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
$$

Věta o inverzní funkci jedné proměnné – připomenutí

Pokud k dané funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inverzní funkce f^{-1} existuje (nezaměňujme značení s funkcí $x \mapsto (f(x))^{-1}$), pak je dána jednoznačně kterýmkoliv ze vztahů $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}},$. Pokud bychom věděli, že pro diferencovatelnou funkci f je i f^{-1} diferencovatelná, vztah pro derivaci složené funkce nám (pro $y = f(x)$) dává

$$1 = (\mathrm{id})'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

a tedy přímo víme formuli (zjevně $f'(x)$ v takovém případě nemůže být nulové) $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Věta

Je-li f diferencovatelná funkce na okolí bodu x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje na nějakém okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ funkce f^{-1} inverzní k f a platí vztah

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Příklady – opakování

Příklad

Určete derivaci v obecném bodě definičního oboru inverzní funkce k funkci:

1. e^x;
2. $\sin x$.

Věta o inverzním zobrazení

Věta

Nechť $F : E_n \to E_n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení na nějakém okolí bodu $x^* \in E_n$ a nechť je Jacobiho matice $D^1F(x^*)$ invertibilní. Pak na nějakém okolí bodu x^* existuje inverzní zobrazení F^{-1} a jeho diferenciál v bodě $F(x^*)$ je inverzním zobrazením k $D^1F(x^*)$, tzn. je zadán inverzní maticí k Jacobiho matici zobrazení F v bodě x^*.

Příklad

Rozhodněte, zda zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované po souřadnicích

$$f(x, y) = xy, g(x, y) = \frac{x}{y}$$

je prosté v okolí bodu $[2, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(2, 1)$.

Příklad

Spočítejte jacobián zobrazení F, které je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.

Věta o implicitní funkci – neformální připomenutí

Pokud máme zadánu funkci $f(x)$ vzorcem $y = f(x)$, hovoříme o jejím *explicitním* zadání. Obecnějším zadáním funkce je rovnice $F(x, y) = 0$, kde závislá proměnná y představuje „neznámou“ funkci. Pokud tuto rovnici nelze (nebo to nepotřebujeme) vyřešit vzhledem k y, pak hovoříme o funkci zadané *implicitně*. Avšak i v tomto obecnějším případě budeme schopni vypočítat $y'(x)$ (aniž bychom nutně znali explicitní vzorec pro $y(x)$), a to pomocí pravidla pro derivaci složené funkce.

Příklad

Rovnice $y^2 = x$ definuje *dvě* diferencovatelné funkce proměnné x:

$$y_1 = \sqrt{x}, \qquad y_2 = -\sqrt{x}$$

Při derivování implicitně zadaných funkcí obsahuje výsledná derivace y' jak proměnnou x tak proměnnou y (na rozdíl od *běžného* derivování funkce, kdy je ve výsledku pouze proměnná x).

Věta o implicitní funkci

Pro jednoduchost vyložíme ideu v rovině E_2:
Pro spojitě diferencovatelnou funkci $F(x,y) : E_2 \to \mathbb{R}$ hledejme body $[x,y]$, ve kterých platí $F(x,y) = 0$. Příkladem může být třeba obvyklá (implicitní) definice přímek a kružnic:

$$F(x,y) = ax + by + c = 0$$
$$F(x,y) = (x-s)^2 + (y-t)^2 - r^2 = 0, \;\; r > 0.$$

V prvním případě je (při $b \neq 0$) předpisem zadaná funkce

$$y = f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

pro všechna x. Ve druhém případě umíme pouze pro $[a,b]$ splňující rovnici kružnice a $b \neq t$ najít okolí bodu a, na kterém nastane jedna z možností: $y = f(x) = t + \sqrt{(x-s)^2 - r}$,
$y = f(x) = t - \sqrt{(x-s)^2 - r}$.

Body $[s \pm r, t]$ také vyhovují rovnici kružnice, platí v nich ale $F_y(s \pm r, t) = 0$, což znamená, že tečna ke kružnici v těchto bodech je rovnoběžná s osou y. V těchto bodech neumíme najít okolí, na němž by kružnice byla popsána jako funkce $y = f(x)$. Navíc umíme spočítat i **derivace**:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2(x-s)}{\sqrt{(x-s)^2 - r^2}} = \frac{x-s}{y-t} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Naopak, pokud budeme chtít najít závislost $x = f(y)$ takovou, aby $F(f(y), y) = 0$, pak v okolí bodů $(s \pm r, t)$ bez problémů uspějeme. Všimněme si, že v těchto bodech je parciální derivace F_x nenulová.

Shrňme pozorování (pro pouhé dva příklady):

Pro funkci $F(x, y)$ a bod $[a, b] \in E_2$ takový, že $F(a, b) = 0$, umíme najít funkci $y = f(x)$ splňující $F(x, f(x)) = 0$, pokud je $F_y(a, b) \neq 0$. V takovém případě umíme i vypočíst $f'(x) = -F_x/F_y$. Z následující věty plyne, že takto to platí vždy, navíc pro libovolné počty proměnných.

Věta (O implicitní funkci)

Nechť $F : E_{n+1} \to \mathbb{R}$ *je spojitě diferencovatelná funkce na otevřeném okolí bodu* $[x^*, y^*] \in E_n \times \mathbb{R}$*, ve kterém je* $F(x^*, y^*) = 0$ *a* $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$*. Potom existuje spojitá funkce* $f : E_n \to \mathbb{R}$ *definovaná na nějakém okolí* U *bodu* $x^* \in E_n$ *taková, že* $F(x, f(x)) = 0$ *pro všechny* $x \in U$*.*
Navíc má funkce f *v okolí bodu* x^* *parciální derivace splňující*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Pomůcka

Poslední tvrzení o derivaci přitom je dobře zapamatovalné (i pochopitelné) z výrazu pro diferenciál:

$$0 = \mathrm{d}F = F_x \,\mathrm{d}x + F_y \,\mathrm{d}y = (F_x + F_y f'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

Nakreslete graf funkce definované implicitně vztahem

$$\left(\left(\frac{x}{7}\right)^2\sqrt{\frac{||x|-3|}{|x|-3}}+\left(\frac{y}{3}\right)^2\sqrt{\frac{\left|y+\frac{3\sqrt{33}}{7}\right|}{y+\frac{3\sqrt{33}}{7}}}-1\right)\cdot$$

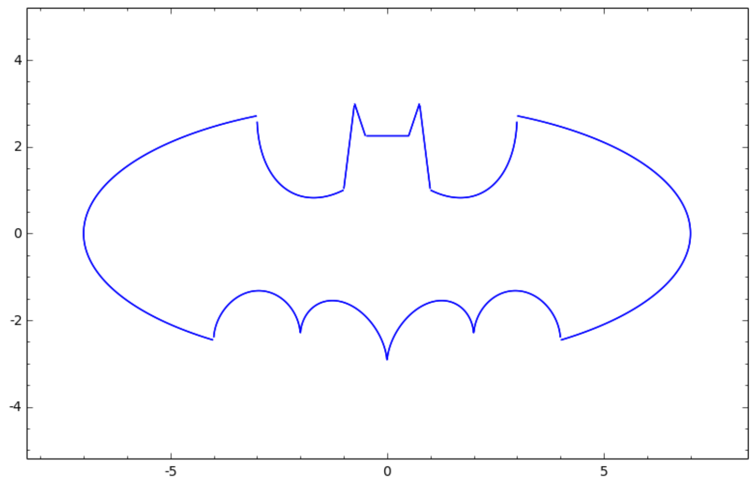
$$\cdot\left(\left|\frac{x}{2}\right|-\left(\frac{3\sqrt{33}-7}{112}\right)x^2-3+\sqrt{1-(||x|-2|-1)^2}-y\right)\cdot$$

$$\cdot\left(9\sqrt{\frac{|(|x|-1)(|x|-.75)|}{(1-|x|)(|x|-.75)}}-8|x|-y\right)\cdot\left(2.25\sqrt{\frac{|(x-.5)(x+.5)|}{(.5-x)(.5+x)}}-y\right)\cdot$$

$$\cdot\left(3|x|+.75\sqrt{\frac{|(|x|-.75)(|x|-.5)|}{(.75-|x|)(|x|-.5)}}-y\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{6\sqrt{10}}{7}+(1.5-.5|x|)\sqrt{\frac{||x|-1|}{|x|-1}}-\frac{6\sqrt{10}}{14}\sqrt{4-(|x|-1)^2}-y\right)=0$$

Řešení (Batman curve)



Příklad

Určete lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$, která je určena implicitně rovnicí $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz - 1 = 0$.

Řešení

Derivováním rovnosti podle x a y dostáváme:

$$2x + 2z \cdot z_x - z - x \cdot z_x - \sqrt{2}yz_x = 0$$
$$2y + 2z \cdot z_y - x \cdot z_y - \sqrt{2}z - \sqrt{2}yz_y = 0,$$

odkud vyjádříme

$$z_x = \frac{z - 2x}{2z - x - \sqrt{2}y}, \qquad z_y = \frac{\sqrt{2}z - 2y}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Řešení (pokr.)

Stacionární body musí splňovat: $z_x = 0$, $z_y = 0$, tj. $z = 2x = \sqrt{2}y$, a tedy $y = \sqrt{2}x$. Dosazením do původní rovnice dostáváme stacionární body $[1, \sqrt{2}, 2]$ a $[-1, -\sqrt{2}, -2]$. V těchto bodech je $F_z \neq 0$ (je to zároveň jmenovatel všech zde vystupujících zlomků), proto je v jejich okolí implicitně určena jistá funkce $z = f(x, y)$. Dalším derivováním implicitní rovnice vypočteme parciální derivace f 2. řádu:

$$z_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Ve stacionárních bodech je Hf negativně, resp. pozitivně definitní, proto zde nastávají lokální maximum, resp. minimum funkce f.

Body, v nichž *není* danou rovnicí implicitně určena funkce $z = f(x, y)$ jsou body roviny $2z - x - \sqrt{2}y = 0$ (tedy body, v nichž během výpočtu dostaneme nulový jmenovatel některé z derivací).

Příklady k procvičení

Příklad

Ukažte, že funkce $F(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x)$ definuje předpisem $F(x, y) = 1$ pro $[x, y] \in (0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2})$ implicitně proměnnou y jako funkci $f(x)$ proměnné x. Určete $f'(x)$.

Příklad

Rozhodněte, zda křivka tvořená body vyhovujícími vztahu $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1, 1]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Nejobecnější případ, kdy definujeme implicitně zadané zobrazení, popisuje následující věta (v případě n=1 kopíruje větu o implicitní funkci).

Věta (O implicitním zobrazení)

Nechť $F : E_{m+n} \to E_n$ *je spojitě diferencovatelné zobrazení na otevřeném okolí bodu* $[x^*, y^*] \in E_m \times E_n = E_{m+n}$*, v němž platí* $F(x^*, y^*) = \mathbf{0}$ *a* $\det D^1_y F \neq 0$*. Potom existuje spojitě diferencovatelné zobrazení* $G : E_m \to E_n$ *definované na nějakém okolí* U *bodu* $x^* \in E_m$ *s obrazem* $G(U)$*, který obsahuje bod* y^**, a takové, že* $F(x, G(x)) = 0$ *pro všechny* $x \in U$*.*
Navíc je Jacobiho matice $D^1 G$ *zobrazení* G *na okolí bodu* x^* *zadána součinem matic*

$$D^1 G(x) = -(D^1_y F)^{-1}(x, G(x)) \cdot D^1_x F(x, G(x)).$$