Matematika III – 6. přednáška
Funkce více proměnných: Vázané extrémy, úvod do integrálního počtu

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

20. 10. 2014

Obsah přednášky

1. Implicitně definovaná zobrazení
   - Tečny a normály k implicitně zadaným plochám
   - Tečné a normálové prostory
2. Vázané extrémy
   - Metoda Lagrangeových multiplikátorů
3. Integrální počet více proměnných
   - Integrály závislé na parametru
   - Integrace funkcí více proměnných

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Gradient funkce

Definice

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $f(x_1, \dots, x_n) : E_n \to \mathbb{R}$ se dříve zavedený vektor parciálních derivací

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

nazývá **gradient funkce** f.
V technické a fyzikální literatuře se často zapisuje také jako grad f.

Rovnost $f(x_1, \dots, x_n) = b$ s pevnou hodnotou $b \in \mathbb{R}$ zadává podmnožinu $M \subset E_n$, která mívá vlastnosti $(n-1)$–rozměrné nadplochy. Přesněji: pokud je vektor parciálních derivací nenulový, můžeme lokálně množinu M popsat jako graf spojitě diferencovatelné funkce v $n-1$ proměnných.
Hovoříme v této souvislosti také o **úrovňových množinách** M_b (analogie vrstevnic v př. $n = 2$).

Na derivacích křivek ležících v úrovňové množině M_b se bude diferenciál $\mathrm{d}f$ vždy vyčíslovat nulově:
$f(c(t)) = b$ pro všechna t, proto

$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = \mathrm{d}f(c'(t)) = 0.$$

Pro obecný vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in E_n$ je velikost příslušné směrové derivace funkce f:

$$|\,\mathrm{d}_v f| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n \right| = \langle \mathrm{d}f, v \rangle = \|\,\mathrm{d}f\|\|v\| \cos \varphi$$

kde φ je odchylka vektoru v od gradientu funkce f. Dokázali jsme:

Věta

Směr zadaný gradientem v bodě $x = (x_1, \dots, x_n)$ je právě ten směr, ve kterém funkce f nejrychleji roste.
Tečná rovina k neprázdné úrovňové množině M_b v okolí jejího bodu s nenulovým gradientem $\mathrm{d}f$ je určena ortogonálním doplňkem ke gradientu.

Tečná nadrovina

Násobkům gradientu v tomto případě říkáme **normálový vektor** nadplochy M_b.

Věta

Pro funkci f n proměnných a bod $P = (a_1, \dots, a_n) \in M_b$, v jehož okolí je M_b grafem funkce $(n-1)$ proměnných, je implicitní rovnice pro tečnou nadrovinu

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \cdot (x_n - a_n).$$

Tečné a normálové prostory

Obecná dimenze: funkce $F = (f_1, \dots, f_n) : E_{m+n} \to E_n$ a n rovnic

$$f_i(x_1, \dots, x_{m+n}) = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dle věty o implicitním zobrazení je „většinou“ množina všech řešení $(x_1, \dots, x_{m+n})$ grafem zobrazení $G : E_m \to E_n$. Pro pevnou volbu $b = (b_1, \dots, b_n)$ je samozřejmě množinou M všech řešení průnik nadploch $M(b_i, f_i)$ příslušejících jednotlivým rovnicím $f_i = b_i$.
Totéž platí pro tečné směry a normálové směry:
Afinní podprostor v E_{m+n} obsahující právě všechny tečny k M bodem P dán rovnicemi:

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \cdot (x_{m+n} - a_{m+n})$$

$$\vdots$$

$$0 = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(P) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(P) \cdot (x_{m+n} - a_{m+n}).$$

Tento podprostor se nazývá **tečný prostor** k (implicitně zadané) ploše M v bodě P. **Normálový prostor** v bodě P je afinní podprostor generovaný bodem P a gradienty všech funkcí $f_1, \dots, f_n$ v bodě P, tj. řádky Jacobiho matice $D^1 F$.

Příklad

Spočtěme tečnu a normálový prostor ke kuželosečce v E_3. Uvažujme rovnici

$$0 = f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$$

kuželu s vrcholem v počátku a rovinu zadanou vztahem

$$0 = g(x, y, z) = z - 2x + y + 1.$$

Bod $P = (1, 0, 1)$ patří kuželu i rovině a průnik M těchto dvou ploch je křivka.

Příklad (pokr.)

Její tečnou v bodě P bude přímka zadaná rovnicemi

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x\bigg|_{x=1,y=0}\cdot(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y\bigg|_{x=1,y=0}\cdot y \\
&\qquad + 1\cdot(z-1) \\
&= -x+z \\
0 &= -2(x-1)+y+(z-1) = -2x+y+z+1,
\end{aligned}$$

zatímco rovina kolmá k naší křivce bodem P bude parametricky dána výrazem

$$(1,0,1)+\tau(-1,0,1)+\sigma(-2,1,1)$$

s parametry τ a σ.

Již dříve jsme se zabývali úlohou nalézt absolutní extrém dané funkce na (uzavřené) množině, což vedlo na vyšetření lokálních extrémů funkce na hranici této množiny. Jinými slovy, na hledání extrémů funkce v bodech, které jsou *vázány* nějakou další podmínkou.

Ukážeme nejprve názorně graficky na případu funkcí dvou proměnných obecnou metodu.

Příklad

Určete extrémy funkce $h(x, y) = x^2y$ na množině M dané implicitně rovnicí $5x^2 + 2y^2 = 14$.

Viz applet na webu MIT.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů

V předchozím příkladu jsme viděli, že normálový vektor (tj. gradient) funkce, k níž hledáme extrém, musí být ve vyšetřovaném bodě prvkem normálového prostoru k ploše (v témže bodě). Toto samozřejmě platí i obecně.
Pokud je M ve všech svých bodech grafem hladkého zobrazení, musí být každý extrém $P \in M$ stacionárním bodem, tj. pro každou křivku $c(t) \subset M$ procházející přes $P = c(0)$ musí být $h(c(t))$ extrémem pro tuto funkci jedné proměnné. Proto musí platit

$$\frac{d}{dt}h(c(t))_{|t=0} = \mathrm{d}_{c'(0)}h(P) = \mathrm{d}h(P)(c'(0)) = 0.$$

Tato vlastnost je ekvivalentní tvrzení, že gradient funkce h leží v normálovém podprostoru. Takové body $P \in M$ budeme nazývat **stacionární body** funkce h vzhledem k vazbám F.

V praxi mívají optimalizační úlohy často $m+n$ parametrů, které jsou vázány n podmínkami. V našem jazyce diferenciálního počtu tedy hledáme extrémy spojitě diferencovatelné funkce h na množině bodů M zadaných implicitně rovnicí $F(x_1, \dots, x_{m+n}) = \mathbf{0}$ ($F : E_{m+n} \to E_n$).
Normálový prostor k naší množině M je generován řádky Jacobiho matice zobrazení F a stacionární body jsou proto ekvivalentně určeny následujícím tvrzením, kterému se říká **metoda Lagrangeových multiplikátorů**:

Věta

Nechť $F = (f_1, \dots, f_n) : E_{m+n} \to E_n$ je spojitě diferencovatelná v okolí bodu P, $F(P) = 0$ a M je zadána implicitně rovnicí $F(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0$, přičemž hodnost matice D^1F v bodě P je n. Pak P je stacionárním bodem spojitě diferencovatelné funkce $h : E_{m+n} \to \mathbb{R}$ právě, když existují reálné parametry $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ takové, že

$$\operatorname{grad} h = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \cdots + \lambda_n \operatorname{grad} f_n.$$

Absolutní extrémy

Výklad o vázaných extrémech jsme začali tím, že pro nalezení absolutních extrémů funkce na kompaktní množině často potřebujeme vyšetření extrémů na množině bodů vázaných nějakou podmínkou.
Ilustrujme si to na příkladu:

Příklad

Maximalizujte $f(x, y) = 2x + y$ za podmínky $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

Řešení

Množina určená vazební podmínkou je uzavřená a ohraničená, proto zde nabývá jakákoliv spojitá funkce svých extrémů, a to buď ve stacionárních bodech nebo na hranici. Snadno se ale přesvědčíme ($\mathrm{d}f(x,y) = (2,1)$), že uvnitř množiny extrémy nejsou. Proto maximalizujeme funkci f za podmínky $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
Sestrojíme Lagrangeovu funkci
$L(x,y,\lambda) = 2x + y - \lambda(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1)$. Pak dostáváme:

$$
\begin{aligned}
0 &= L_x = 2 - \lambda\frac{x}{2} \\
0 &= L_y = 1 - 2\lambda y \\
0 &= \frac{x^2}{4} + y^2 - 1.
\end{aligned}
$$

Odtud snadno $x = \frac{4}{\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$, a tedy $\lambda = \frac{\sqrt{17}}{2}, x = \frac{8}{\sqrt{17}}, y = \frac{1}{\sqrt{17}}$ (resp. $\lambda = -\frac{\sqrt{17}}{2}, x = -\frac{8}{\sqrt{17}}, y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ pro minimum).

Příklad na procvičení

Příklad

Drát délky ℓ je rozdělen na 3 části. Z jedné části je vytvořen kruh, z druhé čtverec a ze třetí rovnostranný trojúhelník (vždy stočením, resp. složením vytvoříme obvod příslušného útvaru). Určete délky jednotlivých částí tak, aby celková plocha omezená těmito útvary byla **minimální**, resp. **maximální**.

Příklad

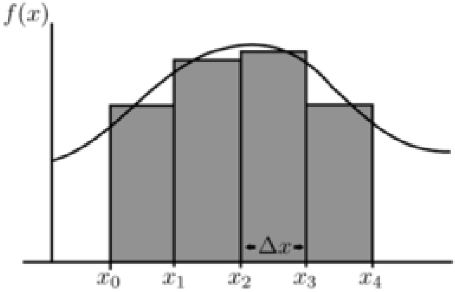
Rozhodněte, zda existují maxima a minima funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x - 2y$ na křivce dané rovnicí $y - x^3 - 2x - 1 = 0, x \in \langle 0, 5 \rangle$. Případné extrémy určete.

Příklad

Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte body na průniku ploch $z^2 = x^2 + y^2$ a $z = 1 + x + y$, které leží nejblíže počátku. Zdůvodněte, že jde skutečně o minimum.

Připomenutí: Riemannův integrál

Motivace: výpočet plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na uzavřeném intervalu.
Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedné proměnné ohraničená na uzavřeném intervalu $[a, b]$).



Připomenutí: Riemannův integrál

Zvolíme dělení $D = \{x_1 = a, \dots, x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ a hledaný integrál (tj. *plochu pod grafem*) aproximujeme součtem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

kde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ je libovolný. (Součet ploch obdélníků pod křivkou).
Je-li *norma dělení* (tj. maximum z délek intervalů $[x_i, x_{i+1}]$) *malá*, pak výše uvedená suma je velmi blízko zmíněné ploše (přesněji pomocí nulové posloupnosti dělení a limit).

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$,
- délka křivky zadané parametricky $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$,
- objem rotačního tělesa $\pi \int_a^b f^2(x)dx$,
- povrch pláště rotačního tělesa $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

Integrály závislé na parametru

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné x funkci $n+1$ proměnných $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, potom výsledek bude funkcí $F(y_1, \ldots, y_n)$ ve zbývajících n proměnných.

Věta (O záměně derivace a integrálu)

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ definovanou pro x z konečného intervalu $[\alpha, \beta]$ a na nějakém okolí bodu $a = [a_1, \ldots, a_n] \in E_n$ uvažujme integrál

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \int_\alpha^\beta f(x, y_1, \ldots, y_n)dx.$$

Potom platí pro všechny indexy $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, a_1, \ldots, a_n)dx.$$

Integrace funkcí více proměnných

Obdobně jako v případě jedné proměnné můžeme potřebu zavedení integrálu více proměnných motivovat výpočtem objemu trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných.

Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části obsahu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.

Co jsou obory integrace?

Nejjednodušším přístupem je uvažovat pouze obory integrace S, které jsou dány jako součiny intervalů, tj. jsou zadány rozsahem $x \in [a, b]$ a $y \in [c, d]$.

Hovoříme v této souvislosti o **vícerozměrném intervalu**.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastí $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.

Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.

Integrál existuje, jestliže pro každou volbu posloupnosti dělení Ξ (nyní ve všech proměnných zároveň) a reprezentantů jednotlivých krychliček (nebo spíše *kvádříčků*)

$$\xi_{i,\dots,j} \in [x_i, x_{i+1}] \times \dots \times [z_j, z_{j+1}] \subset \mathbb{R}^n,$$

s maximální velikostí mezi všemi použitými intervaly jdoucí k nule, budou integrální součty

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i,\dots,j} f(\xi_{i,\dots,j})(x_{i+1} - x_i) \dots (z_{j+1} - z_j).$$

konvergovat k jedné hodnotě, kterou zapisujeme

$$\int_S f(x, \dots, z) dx \dots dz$$

Pro všechny spojité funkce f lze opět dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro „dostatečně spojité“ funkce na „dostatečně rozumných“ oborech integrace.

Definice

Omezenou množinu $S \subset E_n$ označujeme za **Riemannovsky měřitelnou**, jestliže je její charakteristická funkce, definovaná $\chi(x) = 1$ pro $x \in S$ a $\chi(x) = 0$ jinak, Riemannovsky integrovatelná.

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst (kromě využití výpočetní techniky, kdy je přímé použití definice na místě), okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Věta

Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu $S \subset E_n$ je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.
Pokud je obor integrace S zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů S_i, je integrál funkce f přes S dán součtem integrálů přes obory S_i.

Příklad

Vypočtěte dvojný integrál

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy \, dxdy$$

jako limitu integrálního součtu.

Řešení

Za nulovou posloupnost dělení uvážíme posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$, kde n-té dělení dostaneme pomocí přímek $x = i/n, y = j/n$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$, přičemž hodnoty $\xi_{i,j}$ budeme vybírat z pravých horních rohů dělících čtverečků.

Řešení (dokončení)

Pak

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[0,1]} xy\, dxdy &= \lim_{n\to\infty} \sum_{0\le i,j<n} \frac{(i+1)}{n}\frac{(j+1)}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{1\le i,j\le n} ij = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left(\sum_{1\le i\le n} i\right)\left(\sum_{1\le j\le n} j\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$