

# Matematika III – 7. přednáška

## Integrální počet funkcí dvou proměnných

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

27. 10. 2014

# Obsah přednášky

- 1 Integrální počet více proměnných
  - Násobné integrály
  - Záměna souřadnic při integraci
  - Některá využití integrálů více proměnných ve fyzice
  
- 2 Numerické metody
  - Interpolace vs. aproximace
  - Numerická kvadratura (integrování)

## Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple*, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- *Předmětové záložky v IS MU*





Přímým důsledkem pro konstantní funkce je:

### Věta

*Pro vícerozměrný interval  $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  a spojitou funkci  $f(x_1, \dots, x_n)$  na  $S$  je násobný integrál*

$$\begin{aligned} \int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \dots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n \end{aligned}$$

*nezávislý na pořadí, ve kterém postupně integraci provádíme.*

## Příklad (nezávislé meze integrace)

Vypočtěte dvojný integrál

$$I = \int_{[0,1] \times [0,3]} 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \, dx \, dy.$$

## Řešení

S využitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left( \int_0^1 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \, dx \right) dy = \\ &= \int_0^3 [(x-1)^3 + x(y-2)^2 + 2x]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^3 (y-2)^2 + 3 \, dy = \left[ \frac{1}{3}(y-2)^3 + 3y \right]_0^3 = 12 \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme i při integraci v opačném pořadí.

## Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtete integrál

$$I = \int_S xy^2 \, dx \, dy,$$

kde  $S$  je plocha v 1. kvadrantu  $E_2$  ohraničená grafy funkcí  $y = x$  a  $y = x^2$ .

## Řešení

Snadno je vidět, že grafy se protínají v bodech  $[0, 0]$  a  $[1, 1]$ , přičemž pro  $x \in [0, 1]$  je  $x^2 \leq x$ . Proto je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x xy^2 \, dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 [xy^3]_{y=x^2}^x dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^4 - x^7) dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{40}. \end{aligned}$$



# Příklady k procvičení

## Příklad

Převed'te dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) dA$  na dvojnásobný (obě možnosti pořadí integrace) pro množinu  $A$  ohraničenou přímkami  $y = x, y = x - 3, y = 2, y = 4$ . Ověřte (přímo nebo s využitím SW např. MAW) rovnost výsledku pro konkrétní funkci  $f(x, y) = y$ .

## Záměna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj.

Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných. Připomeňme nejdříve, jak je to s transformacemi pro jednu proměnnou: Integrovaný výraz  $f(x) dx$  vyjadřuje plochu obdélníčku určeného (linearizovaným) přírůstkem proměnné  $x$  a hodnotou  $f(x)$ . Pokud proměnnou transformujeme vztahem  $x = u(t)$ , vyjadřuje se i linearizovaný přírůstek jako

$$dx = \frac{du}{dt} dt$$

a proto i příslušný příspěvek pro integrál je vyjádřen jako

$$f(u(t)) \frac{du}{dt} dt,$$

přičemž buď předpokládáme, že znaménko derivace  $u'(t)$  je kladné, nebo dojde k obrácení mezí integrálu, takže ve výsledku se znaménko neprojeví.

Intuitivně je postup v  $n$  proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů

([http://en.wikipedia.org/wiki/Integration\\_by\\_substitution#Substitution\\_for\\_multiple\\_variables](http://en.wikipedia.org/wiki/Integration_by_substitution#Substitution_for_multiple_variables)).

### Věta

*Nechť  $G(t_1, \dots, t_n) : E_n \rightarrow E_n$ ,  $[x_1, \dots, x_n] = G(t_1, \dots, t_n)$ , je spojitě diferencovatelné zobrazení,  $T$  a  $S = G(T)$  jsou Riemannovsky měřitelné množiny a  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá funkce. Potom platí*

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_T f(G(t_1, \dots, t_n)) |\det(D^1 G(t_1, \dots, t_n))| dt_1 \dots dt_n.$$

Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce  $f(x, y)$  ve dvou proměnných a transformaci  $G(s, t) = (g(s, t), h(s, t))$ .

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x, y) dx dy = \int_T f(g(s, t), h(s, t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right| ds dt.$$

### obsah kruhu

Konkrétně: spočtíme integrál z charakteristické funkce kruhu o poloměru  $R$  (tj. jeho obsah) definovaného v polárních souřadnicích. Nejprve spočítáme Jacobiho matici transformace  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Proto je determinant z této matice roven  $\det D^1 G(r, \varphi) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$ .

Můžeme tedy přímo počítat pro kružnici  $S$  o poloměru  $R$ , která je obrazem obdélníku  $(r, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi] = T$ :

$$\int_S dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2.$$

## Příklad (využití polárních souřadnic)

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

## Řešení

Z předchozího víme, že při transformaci  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  je determinant Jacobiho matice roven  $r$ . Proto

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 f(r) \cdot r \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^1 f(r) \cdot r \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^1 f(r) \cdot r \, dr. \end{aligned}$$

# Příklady k procvičení

## Příklad

Vypočtete integrál

$$\iint_A 2(x^2 + y^2) dA,$$

kde  $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$ .

## Příklad

Spočtete integrál

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx.$$

## Příklad

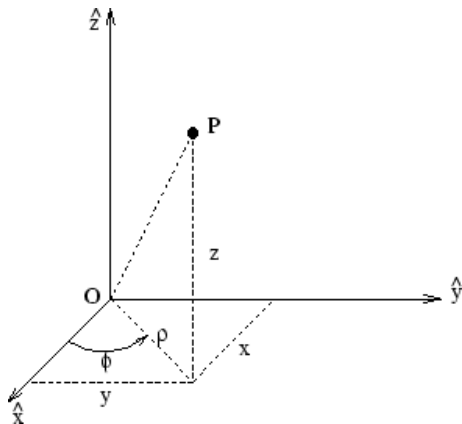
Pomocí vhodné transformace souřadnic vypočtete integrál

$\iint_A \sqrt{xy} dx dy$ , kde množina  $A$  je ohraničena křivkami  $y^2 = 2x$ ,  $y^2 = x$ ,  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ .

Časté transformace souřadnic v  $E_3$ **Válcové souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$





**Válcové souřadnice** Zobrazení

$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \\ \left( r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z \right),\end{aligned}$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

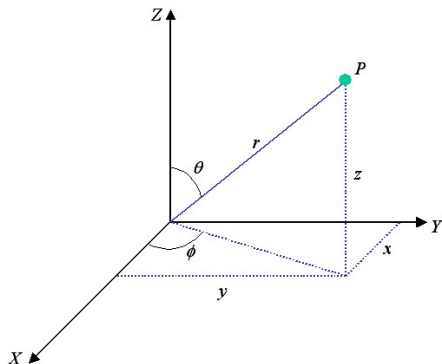
Proto je  $\det D^1 G = r$ .

# Časté transformace souřadnic v $E_3$

## Sférické souřadnice<sup>1</sup>

Zobrazení  $G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$



<sup>1</sup><http://demonstrations.wolfram.com/SphericalCoordinates/>

## Sférické souřadnice

Zobrazení  $G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\} \rightarrow E_3$  je dáno předpisem

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\left( r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto je

$$\begin{aligned} \det D^1 G &= r^2 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \\ &+ r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi = \\ &= r^2 \sin^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

## Příklad

Vypočtete objem koule o poloměru  $R$ .

## Řešení

Koule  $B(R)$  o poloměru  $R$  je dána ve sférických souřadnicích  $(r, \theta, \varphi)$  jednoduchou podmínkou  $r \leq R$ . Je tedy obrazem intervalu  $U = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ , přičemž víme, že objemový element (tj. determinant jakobiánu transformačního zobrazení) je roven  $r^2 \sin \theta$ . Proto je objem koule roven

$$\begin{aligned} \int_B 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_U r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} R^3 \pi. \end{aligned}$$

## Příklad

Vypočtěte integrál

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

kde množina  $V$  je vymezena plochou  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

## Řešení

Transformací do sférických souřadnic dostáváme (grafem plochy je koule se středem v  $[0, 0, 1/2]$  a poloměrem  $1/2$ ) – promyslete meze!

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} r \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \dots = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

# Určování mezí integrace

Častým obtížným úkolem je při integraci v  $E_3$  určování integračních mezí. V tom nám může pomoci:

- prostorová představivost
- u symetrických objektů omezení pouze na výpočet v části objektu
- zakreslení řezu objektu vhodnými rovinami (často  $x = 0$ ,  $y = 0$  nebo  $z = 0$ , případně využití SW pro vykreslení prostorového grafu.

# Využití ve fyzice

## Hmotnost tělesa

Těleso o objemu  $V$  a hustotě v bodě  $[x, y, z]$  dané funkcí  $\rho(x, y, z)$  má hmotnost danou vztahem

$$M = \int_V \rho \, dx \, dy \, dz.$$

## Těžiště tělesa

Těleso o objemu  $V$  a hustotě v bodě  $[x, y, z]$  dané funkcí  $\rho(x, y, z)$  má souřadnice těžiště  $[x_0, y_0, z_0]$  dané vztahy

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_V x \rho \, dx \, dy \, dz, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_V y \rho \, dx \, dy \, dz, \quad z_0 = \frac{1}{M} \int_V z \rho \, dx \, dy \, dz.$$

# Využití ve fyzice – pokr.

## Moment setrvačnosti

Momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose  $\ell$  je

$$I_\ell = \int_V \rho r^2 \, dx \, dy \, dz,$$

kde  $r$  je funkce závislosti bodu  $[x, y, z]$  od osy  $\ell$ .

### Příklad

Určete souřadnice těžiště kruhové destičky  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , je-li její hustota v bodě  $[x, y]$  přímo úměrná vzdálenosti od bodu  $[a, 0]$ .

$$[x_T = -\frac{a}{5}, y_T = 0]$$

### Příklad

Vypočtete moment setrvačnosti homogenního válce

$x^2 + y^2 \leq a^2, |z| \leq h$  o hustotě  $\rho_0$  vzhledem k ose tvořené přímkou  $x = y = z$ .

$$[\frac{M}{3} (a^2 + \frac{2}{3}h^2)], \text{ kde } M \text{ je hmotnost válce.}]$$



## Příklad

Vypočtete

- 1 těžiště,
- 2 momenty setrvačnosti vzhledem k souřadným osám

tenké homogenní rovinné lichoběžníkové desky s vrcholy v bodech  $[-1, 0]$ ,  $[2, 0]$ ,  $[2, 2]$  a  $[-1, 1]$ .

## Řešení

Hustota  $\rho(x, y) = 1$  pro libovolná  $x, y$ . Integrujeme přes množinu  $A: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{3}(x + 4)$ .

Dostaneme

$$M = \iint_A dA = \frac{9}{2}, T_x = \frac{1}{M} \iint_A x \cdot 1 dA = \frac{2}{3}, T_y = \frac{1}{M} \iint_A y \cdot 1 dA = \frac{7}{9}, J_x(A) = \iint_A y^2 dA = \frac{15}{4}, J_y(A) = \iint_A x^2 dA = \frac{21}{4}.$$

# Interpolace a aproximace – opakování

*Interpolace* – stanovení formule pro funkci, kterou máme zadánu v bodech  $x_0, \dots, x_n$ . Formule musí v těchto bodech dodržet danou funkční hodnotu (např. interpolační polynom stupně  $n$ ). Mimo interval – *extrapolace*.

*Aproximace* – stanovení formule pro funkci, kterou máme zadánu v bodech  $x_0, \dots, x_n$ . Formule má obvykle méně „stupňů volnosti“ než  $n$ , proto danou funkční hodnotu obvykle nejde dodržet. Snažíme se najít nejlepší možnou aproximaci podle předem daného kritéria (např. metoda nejmenších čtverců).

# Aproximace metodou nejmenších čtverců

Slouží k rekonstrukci funkce  $f$  z hodnot  $f_0, \dots, f_n$  naměřených v uzlových bodech  $a_0, \dots, a_n$ . Tuto rekonstrukci hledáme vzhledem k danému modelu – dané posloupnosti funkcí (obecně více proměnných)  $g_0(x), \dots, g_m(x), \dots$  – ve tvaru

$$y_m(x) = \sum_{j=0}^m c_j g_j(x).$$

Cílem je při tom minimalizovat „součet čtverců“

$$\sum_{i=0}^n (f_i - y_m(a_i))^2.$$

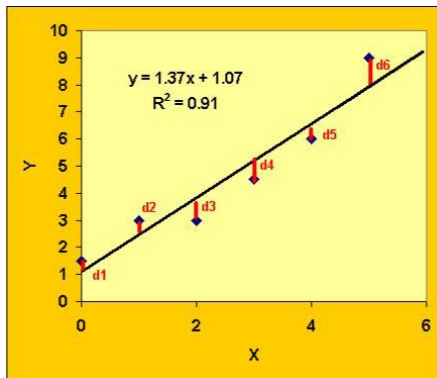
# Aproximace metodou nejmenších čtverců

Aplikace – lineární (multilineární) regrese ve statistice

Typy modelů:

- $g_j(x)$  – obecný polynom stupně  $j$
- $g_j(x)$  – ortogonální polynomy na dané množině bodů
- $g_j(x)$  – trigonometrický polynom

## Aproximace metodou nejmenších čtverců



Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno  $n$  bodů  $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$  a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.

Hledáme tedy funkci tvaru  $f(x) = a \cdot x + b$  s neznámými  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální. S využitím diferenciálního počtu lze snadno odvodit následující tvrzení.

### Věta

*Mezi přímkami tvaru  $f(x) = a \cdot x + b$  má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech  $x_1, \dots, x_n$  od hodnot  $y_i$  funkce splňující*

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$a \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

# Metoda nejmenších čtverců

## Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete regresní přímku odpovídající naměřeným datům:

$x$	1	2	3	4
$y$	1.5	1.6	2.1	3.0

## Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

$x$	$y$	$xy$	$x^2$
1	1.5	1.5	1
2	1.6	3.2	4
3	2.1	6.3	9
4	3	12	16
10	8.2	23	30

Odtud  $a = 0,5$ ,  $b = 0,8$ .

# Numerická integrace (kvadratura)

Numerická integrace nachází uplatnění zejména v následujících případech:

- integrovanou funkci neznáme přímo, známe jen její hodnoty v některých bodech (např. z měření)
- integrovaná funkce je známá, ale její primitivní funkci (antiderivaci) je obtížné (či dokonce nemožné) vyjádřit jakožto *elementární funkci*.



# Numerická kvadratura

Přímo z definice Riemannova integrálu – snaha odhadnout plochu pod křivkou, objem „pod plochou“ apod. Podobně jako u derivování i zde můžeme využít interpolační polynomy.

## Newton-Cotesovy vzorce

Interval  $[a, b]$ , nad kterým integrujeme, rozdělíme na  $n$  **stejných** částí (délky  $h$ ) tak, že v krajních bodech těchto částí známe hodnotu integrované funkce. Podle toho, jestli uvažujeme i hodnoty v krajních bodech  $a$  a  $b$  intervalu, rozlišujeme Newton-Cotesovy formule na *uzavřené* a *otevřené*.

Pak

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i),$$

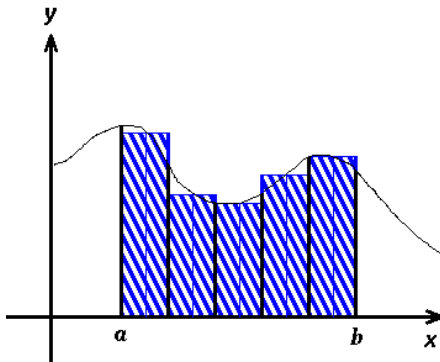
$w_i$  jsou váhy (uzavřený tvar).

Váhy snadno odvodíme např. pomocí Lagrangeovy interpolace.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \, dx &\approx \int_a^b L(x) \, dx = \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \, dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x) \, dx}_{w_i}.\end{aligned}$$

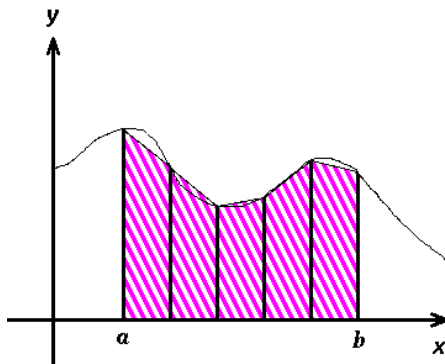
**obdélníkové pravidlo** (otevřená Newton-Cotesova formule) –  
interpolace konstantní funkcí

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$



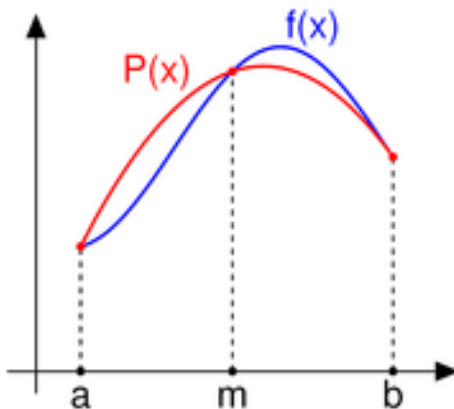
**lichoběžníkové pravidlo** (uzavřená Newton-Cotesova formule) –  
interpolace lineární funkcí

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$



**Simpsonovo pravidlo** (uzavřená Newton-Cotesova formule) –  
interpolace kvadratickou funkcí

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$



## Příklad

Pomocí lichoběžníkového, resp. Simpsonova pravidla vypočtete

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

## Řešení

- lichoběžníkové pravidlo:  $I \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.785$
- Simpsonovo pravidlo:  $I \approx \frac{\pi}{12} \left( 0 + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \approx 1.003.$

# Metody Monte Carlo

Obvykle používané u vícerozměrných integrálů, kde je často výrazně přesnější a efektivnější než násobné použití metod na numerickou integraci jednorozměrných integrálů.

## **Princip – výpočet objemu tělesa $V$ uvnitř jednotkové krychle:**

- vygenerujeme náhodný bod uvnitř jednotkové krychle
- zjistíme, zda leží uvnitř tělesa
- opakujeme

Podíl objemu tělesa a krychle je pak aproximován relativní četností jevu, že náhodný bod leží uvnitř tělesa.

# Metody Monte Carlo

Integrál  $\int_a^b f(x) dx$  tak aproximujeme pomocí výběru náhodných  $n$  bodů  $x_i$  z intervalu  $[a, b]$ , ve kterých určíme funkční hodnoty.

Pak

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$