Matematika III – 8. přednáška
Diferenciální rovnice

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

3. 11. 2014

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zdeněk Pospíšil, *Spojité deterministické modely I*, e-text k přednášce na PřF MU.
- David Joyner, *Introductory differential equations using SAGE*, e-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*

Motivace ke studiu diferenciálních rovnic

Pojem derivace jsme zavedli, abychom mohli pracovat s okamžitými změnami studovaných veličin. Ze stejných důvodů jsme kdysi zaváděli diference a právě vztahy mezi hodnotami veličin a změnami těch samých nebo jiných veličin vedly k tzv. diferenčním rovnicím. Jako motivační úvod k rovnicím obsahujícím derivace neznámých funkcí se k diferenčním rovnicím na chvilku vraťme.
Nejjednodušším modelem bylo úročení vkladů nebo půjček (a totéž pro tzv. Malthusiánský model populace), kdy byl přírůstek úměrný hodnotě.
V rámci spojitého modelování stejný požadavek povede na rovnici vztahující derivaci funkce $y'(t)$ s její hodnotou (tradičně se u takových rovnic explicitně nevypisuje argument neznámé funkce, který je buď znám z kontextu nebo na jeho označení nezáleží):

$$y' = r \cdot y$$

s konstantou úměrnosti r.

$$y' = r \cdot y$$

Je snadné uhodnout **řešení** této rovnosti, tj. funkci $y(t)$, po jejímž dosazení bude rovnost identicky splněna,

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{rt}$$

s libovolnou konstantou C. Tuto konstantu určíme jednoznačně volbou tzv. **počáteční hodnoty** $y_0 = y(t_0)$ v nějakém bodě t_0. Pokud by část růstu v našem modelu byla dána konstantním působením nezávislém na hodnotě y nebo t (jako jsou např. paušální poplatky za vedení účtu nebo přirozený úbytek populace třeba v důsledku porážek na jatkách), mohli bychom použít rovnici s konstantou s na pravé straně

$$y' = r \cdot y + s.$$

$$y' = r \cdot y + s$$

Zjevně bude řešením této rovnice funkce

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{rt} - \frac{s}{r}.$$

K tomuto závěru je velice lehké dojít, pokud si uvědomíme, že množinou všech řešení první (homogenní) rovnice je jednorozměrný vektorový prostor, zatímco řešení rovnice se obdrží přičtením kteréhokoliv jednoho jejího řešení ke všem řešením předchozí rovnice. Lze pak snadno najít rovněž konstantní řešení $y(t) = k$ pro $k = -\frac{s}{r}$.

Teorie

Obecně rozumíme (obyčejnou) diferenciální rovnicí prvního řádu vztah mezi derivací funkce $y'(t)$ v proměnné t, její hodnotou $y(t)$ a samotnou proměnnou, který lze zapsat s pomocí nějaké reálné funkce $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jako rovnost

$$F(y', y, t) = 0.$$

Zápis připomíná implicitně zadané funkce $y(t)$, nicméně navíc je tu závislost na derivaci hledané funkce $y(t)$.
Pokud je rovnice alespoň explicitně vyřešena vzhledem k derivaci, tj.

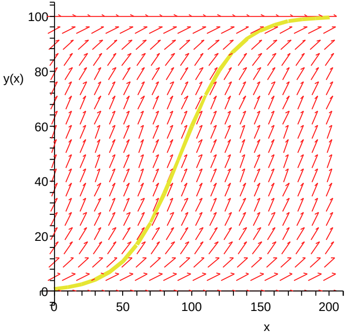
$$y' = f(t, y)$$

pro nějakou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, můžeme si dobře graficky představit, co taková rovnice zadává. Pro každou hodnotu (t, y) v rovině si totiž můžeme představit šipku udávající vektor $(1, f(t, y))$, tj. rychlost se kterou se nám bod grafu řešení bude pohybovat rovinou v závislosti na volném parametru t.

Např. pro rovnici

$$p' = p\left(-\frac{r}{K}p + r\right)$$

(popisující logistický model populačního růstu založený na předpokladu, že poměr změny velikosti populace $p(n+1) - p(n)$ a její velikosti $p(n)$ je v afinní závislosti na samotné velikosti populace) dostaneme takovýto obrázek (i s vyneseným řešením pro počáteční hodnotu $p(0) = 1$).



Diferenciální rovnice se objevují v mnoha oblastech, namátkou: newtonská mechanika, předpověď počasí, elektrické obvody, zahřívání homogenního vodiče, oceňování derivátů (Black-Scholes) a mnoho jiných.

oblast	popis DE
počasí	Navier-Stokesova rovnice nelineární PDE vyššího řádu
padající předmět	lineární ODE 1. řádu
pohyb tělesa na pružině	Hookeva rovnice (lineární 2. řádu)
pohyb kytarové struny	vlnová rovnice lineární PDE 2. řádu
Battle of Trafalgar	Lanchesterovy rovnice systém dvou rovnic 1. řádu
ochlazování šálku čaje	lineární ODE 1. řádu
růst populace	logistická rovnice nelineární, separabilní ODE 1. řádu

Modelový příklad

Změna rychlosti předmětu padajícího v konstantním gravitačním poli v prostředí s jistým odporem je dána vztahem:

$$\frac{dv}{dt} = v' = g - kv,$$

kde k je konstanta udávající odpor prostředí. Prostřednictvím řešení této diferenciální rovnice můžeme určit (po zadání počáteční podmínky) okamžitou rychlost předmětu.

Příklad

Parašutista má i s padákem hmotnost 100 kg. Padák je otevřen 30 s po výskoku z výšky 2000 m. Konstanta popisující odpor prostředí je rovna

$$k = \begin{cases} 0{,}15, & \text{při neotevřeném padáku,} \\ 1, & \text{při otevřeném padáku.} \end{cases}$$

Určete:

a) funkci vzdálenosti a rychlosti (při neotevřeném, resp. otevřeném padáku);

b) trvání seskoku;

c) rychlost přistání.

Taking $m = 100$, $g = 9.8$, $k = 15$ and $v(0) = 0$, we find

$$v_1(t) = \frac{196}{3} - \frac{196}{3}\, e^{-\frac{3}{20}\, t}.$$

After $t = 30$ seconds, this reaches the velocity $v_0 = \frac{196}{3} - \frac{196}{3} e^{-9/2} = 64.607$.. The distance fallen is $x_1(t) = \int_0^t v_1(u)\, du = \frac{196}{3}\, t + \frac{3920}{9}\, e^{-\frac{3}{20}\, t} - \frac{3920}{9}$.
After 30 seconds, it has fallen $x_1(30) = \frac{13720}{9} + \frac{3920}{9} e^{-9/2} = 1529.283...$ meters.
Taking $m = 100$, $g = 9.8$, $k = 100$ and $v(0) = v_0$, we find $v_2(t) = \frac{49}{5} + e^{-t}\left(\frac{833}{15} - \frac{196}{3}\, e^{-9/2}\right)$. This is the velocity with the time t starting the moment Wile E. Coyote opens his chute (i.e., 30 seconds after jumping). The distance fallen is

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_0^t v_2(u)\, du + x_1(30) \\ &= \frac{49}{5}\, t - \frac{833}{15}\, e^{-t} + \frac{196}{3}\, e^{-t} e^{-9/2} + \frac{71099}{45} + \frac{3332}{9}\, e^{-9/2}. \end{aligned}$$

Separované proměnné

Uvažujme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(t) \cdot g(y)$$

pro dvě spojité funkce jedné reálné proměnné f a g, $g(y) \neq 0$.
Řešení této rovnice lze získat integrací, tj. nalezením primitivních funkcí

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \quad F(t) = \int f(t)\, dt.$$

Postup spolehlivě najde řešení splňující $g(y(t)) \neq 0$.
Pak totiž spočtením funkce $y(t)$ z implicitně zadaného vztahu $F(t) + C = G(y)$ s libovolnou konstantou C vede k řešení, protože derivováním této rovnosti s použitím pravidla pro derivování složené funkce $G(y(t))$ dostaneme skutečně $\frac{1}{g(y)} \cdot y'(t) = f(t)$.

Příklad

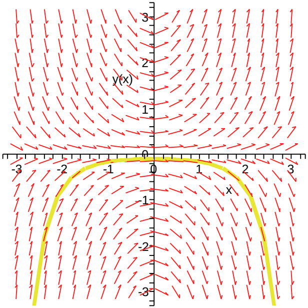
Jako příklad najděme řešení rovnice

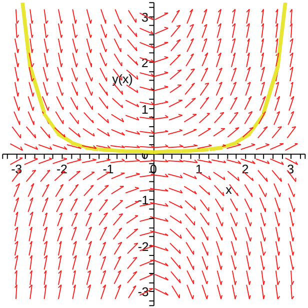
$$y' = x \cdot y.$$

Přímým výpočtem dostaneme $\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C$. Odtud to vypadá (alespoň pro kladná y) na

$$y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 + C} = D \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2},$$

kde D je nyní libovolná kladná konstanta. Zastavme se ale pozorněji u výsledné formule a znamének. Konstantní řešení $y(x) = 0$ vyhovuje naší rovnici také a pro záporná y můžeme použít stejné řešení s zápornými konstantami D. Ve skutečnosti může být konstanta D jakákoliv a našli jsme řešení vyhovující jakékoliv počáteční hodnotě.





Na obrázku jsou vynesena dvě řešení, která ukazují na *nestabilitu* rovnice vůči počátečním podmínkám: Jestliže pro libovolné x_0 změníme malinké y_0 z negativní na pozitivní hodnotu, pak se nám dramaticky mění chování výsledného řešení. Navíc si povšimněme konstantního řešení $y(x) = 0$, které odpovídá počáteční podmínce $y(x_0) = 0$.

Příklady k procvičení

Příklad

Najděte obecné řešení rovnice $y - y^2 + xy' = 0$.

Příklad

Určete obecné řešení rovnice $y' = (2 - y)\operatorname{tg} x$.

Řešení:

Postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (2-y)\operatorname{tg} x,\\
-\frac{dy}{y-2} &= \frac{\sin x}{\cos x}\,dx,\\
-\ln|\,y-2\,| &= -\ln|\,\cos x\,| - \ln|\,C\,|, \quad C \neq 0.
\end{aligned}
$$

Posunutí dané integrováním jsme zde vyjádřili pomocí $\ln|\,C\,|$, což je vhodné tehdy, když na obou stranách rovnice obdržíme logaritmus. Odtud $y-2 = C\cos x, \quad C \neq 0$, kde bychom měli psát $\pm C$. Díky tomu, že uvažujeme všechna nenulová C, na znaménku nezáleží. Protože jsme dělili výrazem $y-2$, je třeba případ $y \equiv 2$ vyšetřovat zvlášť. Derivace konstantní funkce je nulová, a tudíž jsme nalezli ještě jedno řešení $y \equiv 2$. To však není singulární: volbou $C = 0$ jej můžeme zahrnout do dříve určeného obecného řešení. Výsledkem tak je $y = 2 + C\cos x, \quad C \in \mathbb{R}$.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Jde o rovnici tvaru $y' = a(t)y + b(t)$ se spojitými koeficienty $a(t)$ a $b(t)$.
Nejprve najděme řešení homogenizované rovnice $y'(t) = a(t)y(t)$.
To snadno spočteme pomocí separace proměnných a dostáváme

$$y(t) = y_0 F(t, t_0), \quad F(t, s) = e^{\int_s^t a(x)\, dx}.$$

Řešení původní (nehomogenní) rovnice s počáteční podmínkou $y(t_0) = y_0$ je (na intervalech spojitosti koeficientů $a(t)$, $b(t)$) dáno vztahem

$$y(t) = y_0 F(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t, s) b(s)\, ds,$$

kde $F(t, s) = e^{\int_s^t a(x)\, dx}$.
Funkce $e^{\int -a(x)\, dx}$ se často nazývá *integrační faktor*, protože se příklady často řeší právě vynásobením zadané rovnice tímto faktorem.

Příklady k procvičení

Příklad

Rychlost, kterou se rozpadá konkrétní izotop daného prvku, je přímo úměrná množství izotopu. Poločas rozpadu izotopu Plutonia, ^{239}Pu, je 24 100 let. Za jak dlouho ubude setina z nukleární pumy, jejíž aktivní složkou je zmiňovaný izotop?

Řešení

Označíme-li množství Plutonia jako m, tak pro rychlost rozkladu můžeme napsat diferenciální rovnici

$$\frac{dm}{dt} = -k \cdot m,$$

kde k je nějaká neznámá konstanta. Řešením rovnice je funkce $m(t) = m_0 e^{-kt}$. Dosazením do rovnice pro poločas rozpadu ($e^{-kt} = \frac{1}{2}$) získáme konstantu $k \doteq 2,88 \cdot 10^{-5}$. Hledaný čas je přibližně 349,4 let.

Transformace souřadnic

Homogenní rovnice $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$ převedeme transformací $z = \frac{y}{t}$ (pro $t \neq 0$) na

$$z' = \frac{1}{t^2}(t\,y' - y) = \frac{1}{t}(f(z) - z),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.
Bernoulliovy rovnice jsou tvaru

$$y' = f(t)y + g(t)y^r,$$

kde $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0, 1$. Transformace $z = y^{1-r}$ vede na obecnou lineární rovnici

$$\begin{aligned} z' &= (1-r)y^{-r}(f(t)y + g(t)y^r) \\ &= (1-r)f(t)z + (1-r)g(t). \end{aligned}$$

Příklady k procvičení

Příklad

Řešte rovnici

$$(x^2 - xy)y' + y^2 = 0.$$

Řešení

Jde o homogenní rovnici, proto řešení dostaneme po substituci $y = u \cdot x$ v implicitním tvaru

$$y = c\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,.$$

Praktický model – psí křivka

Pes pronásleduje zajíce. Ten je v čase $t = 0$ v bodě $[0, b]$, pes startuje z bodu $[-a, 0]$, kde $a > 0$. Zajíc běží rovnoměrně ve směru osy y, zatímco pes běží v každém okamžiku směrem k zajíci rychlostí $v > u$. Naším úkolem je určit křivku po níž pes běží a čas T, za nějž pes zajíce dohoní.
Dráhu psa budeme vyjadřovat funkcí $y = y(x)$, která navíc splňuje $y(-a) = 0, y'(-a) = \frac{b}{a}$. V nějakém čase $t < T$ se pes nachází v bodě $[x, y]$ $(x < 0)$ a zajíc v bodě $[0, b + ut]$. Proto je

$$y'(x) = \frac{y(x) - b - ut}{x},$$

tj. $ut = y - xy' - b$.

Délka křivky, kterou pes urazil za dobu t je rovna

$$vt = \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + (y'(z))^2}\,\mathrm{d}z.$$

Odtud vyjádříme t a po dosazení do diferenciální rovnice $ut = y - xy' - b$ dostaneme (s označením $s = \frac{u}{v}$)

$$s\int_{-a}^{x} \sqrt{1 + (y'(z))^2}\,\mathrm{d}z = y - xy' - b.$$

Obě strany zderivujeme podle x a dostaneme

$$xy'' + s\sqrt{1 + (y')^2} = 0.$$

Toto je rovnice jiného typu, než jsme dosud zkoumali – jedná se o tzv. rovnici druhého řádu, která je navíc nelineární. Lze ji ale snadno (po substituci $p = y'$) převést na rovnici se separovanými proměnnými

$$p' = -\tfrac{s}{x}\sqrt{1 + p^2}, p(0) = \tfrac{b}{a}$$

Rovnici $p' = -\frac{s}{x}\sqrt{1+p^2}$ řešíme klasickým postupem (s tím, že $\int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}} = \ln(p + \sqrt{1+p^2})$) a obdržíme výsledek

$$p = \frac{1}{2C}\left(C^2\left(-\frac{a}{x}\right)^s - \left(-\frac{x}{a}\right)^s\right),$$

kde

$$C = \frac{b}{a} + \sqrt{1 + (\tfrac{b}{a})^2}.$$

Integrací již snadno dostaneme $y(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$ a dopočteme čas

$$T = \frac{y(0) - b}{u}.$$