Matematika III – 9. přednáška
Pravděpodobnost – opakování a zobecnění pojmů

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

10. 11. 2014

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

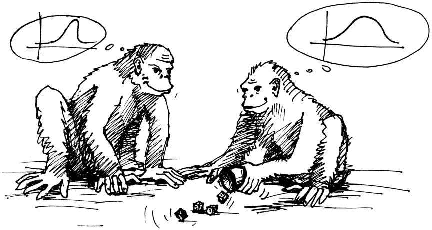
- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- Karel Zvára, Josef Štěpán, **Pravděpodobnost a matematická statistika**, Matfyzpress, 4. vydání, 2006, 230 stran, ISBN 80-867-3271-1.
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, **Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (sbírka příkladů)**, Masarykova univerzita, 3. vydání, 2004, 117 stran, ISBN 80-210-3313-4.
- Marie Budíková, **Statistika**, Masarykova univerzita, 2004, distanční studijní opora ESF, `http://www.math.muni.cz/~budikova/esf/Statistika.zip`.
- Marie Budíková, Tomáš Lerch, Štěpán Mikoláš, **Základní statistické metody**, Masarykova univerzita, 2005, 170 stran, ISBN 80-210-3886-1.

Plán přednášky

Motto:

42,35 procenta všech statistik je nesmyslných.

Statistika v širším slova smyslu je jakékoliv zpracování číselných dat o nějakém souboru objektů a jejich více či méně přehledná prezentace.



Podstatou **matematické statistiky** je pro daná data zjišťovat, jaké vlastnosti mají objekty, které jsou daty popisovány. Zpravidla jde o sběr dat o části souboru objektů, jejich následnou analýzu a konečně o vyslovení důsledků pozorování pro celý soubor.

Podstatou **matematické statistiky** je pro daná data zjišťovat, jaké vlastnosti mají objekty, které jsou daty popisovány. Zpravidla jde o sběr dat o části souboru objektů, jejich následnou analýzu a konečně o vyslovení důsledků pozorování pro celý soubor. Výsledkem práce matematického statistika je sdělení o velkém souboru objektů na základě studia malé (zpravidla náhodně vybrané) části z nich **společně s kvalitativním odhadem věrohodnosti výsledného sdělení.**

Podstatou **matematické statistiky** je pro daná data zjišťovat, jaké vlastnosti mají objekty, které jsou daty popisovány. Zpravidla jde o sběr dat o části souboru objektů, jejich následnou analýzu a konečně o vyslovení důsledků pozorování pro celý soubor. Výsledkem práce matematického statistika je sdělení o velkém souboru objektů na základě studia malé (zpravidla náhodně vybrané) části z nich **společně s kvalitativním odhadem věrohodnosti výsledného sdělení.**

Teorie pravděpodobnosti studuje modely popisující chování abstraktních souborů (pravděpodobnost jevů z jevového pole), statistika studuje skutečné náhodné výběry z nějakého základního souboru a zdůvodňuje výběr teoretického pravděpodobnostního modelu, resp. kvalitativní informace o jeho parametrech.

Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

1. průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,

a mnoho dalších údajů.

Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

1. průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
2. průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92) a z jiných pevně vybraných předmětů (`IB000` – 2,95; `IB102` – 2,89) ,

a mnoho dalších údajů.

Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

1. průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
2. průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92) a z jiných pevně vybraných předmětů (IB000 – 2,95; IB102 – 2,89) ,
3. nejčastější známku (resp. úspěšnou známku) z tohoto předmětu (F – 92 krát, E – 91 krát), nejméně častou známku (B – 15 krát),

a mnoho dalších údajů.

Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

1. průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
2. průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92) a z jiných pevně vybraných předmětů (IB000 – 2,95; IB102 – 2,89) ,
3. nejčastější známku (resp. úspěšnou známku) z tohoto předmětu (F – 92 krát, E – 91 krát), nejméně častou známku (B – 15 krát),
4. průměrný počet bodů dosažených na jednotlivých termínech zkoušky (1. – 16,8; 2. – 8,9; 3. – 8,1; příklad, za nějž bylo uděleno nejvíce (nejméně) procent možných bodů – min. kostra (1B, 82,5%), resp. rekurence (2A, 3,6%)

a mnoho dalších údajů.

Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

1. průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
2. průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92) a z jiných pevně vybraných předmětů (`IB000` – 2,95; `IB102` – 2,89) ,
3. nejčastější známku (resp. úspěšnou známku) z tohoto předmětu (`F` – 92 krát, `E` – 91 krát), nejméně častou známku (`B` – 15 krát),
4. průměrný počet bodů dosažených na jednotlivých termínech zkoušky (1. – 16,8; 2. – 8,9; 3. – 8,1; příklad, za nějž bylo uděleno nejvíce (nejméně) procent možných bodů – min. kostra (1B, 82,5%), resp. rekurence (2A, 3,6%)
5. počet pracovních hodin týdně odpracovaných mimo fakultu,

a mnoho dalších údajů.

Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

1. průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
2. průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92) a z jiných pevně vybraných předmětů (IB000 – 2,95; IB102 – 2,89) ,
3. nejčastější známku (resp. úspěšnou známku) z tohoto předmětu (F – 92 krát, E – 91 krát), nejméně častou známku (B – 15 krát),
4. průměrný počet bodů dosažených na jednotlivých termínech zkoušky (1. – 16,8; 2. – 8,9; 3. – 8,1; příklad, za nějž bylo uděleno nejvíce (nejméně) procent možných bodů – min. kostra (1B, 82,5%), resp. rekurence (2A, 3,6%)
5. počet pracovních hodin týdně odpracovaných mimo fakultu,
6. číselná data vypovídající o historii dřívějšího studia

a mnoho dalších údajů.

Zastavme se u prvního údaje. Samotný aritmetický průměr bodů nám mnoho neřekne nejen o kvalitě přednášky a o kvalitě přednášejícího, ale ani o samotném hodnocení. Zajímá nás také hodnota, která bude „uprostřed souboru“, tj. počet bodů, pro které je stejně studentů pod ní a nad ní.
Obdobně první a poslední čtvrtina, desetina apod. Všem takovým údajům říkáme **statistiky** posuzované veličiny. V uvedených příkladech se jim říká **medián**, **kvartil**, **decil** apod.

Zastavme se u prvního údaje. Samotný aritmetický průměr bodů nám mnoho neřekne nejen o kvalitě přednášky a o kvalitě přednášejícího, ale ani o samotném hodnocení. Zajímá nás také hodnota, která bude „uprostřed souboru“, tj. počet bodů, pro které je stejně studentů pod ní a nad ní.

Obdobně první a poslední čtvrtina, desetina apod. Všem takovým údajům říkáme **statistiky** posuzované veličiny. V uvedených příkladech se jim říká **medián**, **kvartil**, **decil** apod.

Z obecné zkušenosti nebo jako výsledek úvah mimo matematiku víme, že rozumné hodnocení by mělo mít tzv. **normální rozdělení** (odpovídá tzv. *Gaussově křivce*). Tento pojem patří do teorie pravděpodobnosti a k jeho zavedení budeme potřebovat poměrně dost matematiky.

Zastavme se u prvního údaje. Samotný aritmetický průměr bodů nám mnoho neřekne nejen o kvalitě přednášky a o kvalitě přednášejícího, ale ani o samotném hodnocení. Zajímá nás také hodnota, která bude „uprostřed souboru“, tj. počet bodů, pro které je stejně studentů pod ní a nad ní.
Obdobně první a poslední čtvrtina, desetina apod. Všem takovým údajům říkáme **statistiky** posuzované veličiny. V uvedených příkladech se jim říká **medián**, **kvartil**, **decil** apod.
Z obecné zkušenosti nebo jako výsledek úvah mimo matematiku víme, že rozumné hodnocení by mělo mít tzv. **normální rozdělení** (odpovídá tzv. *Gaussově křivce*). Tento pojem patří do teorie pravděpodobnosti a k jeho zavedení budeme potřebovat poměrně dost matematiky.
Porovnáním výsledku třeba i docela malého náhodného výběru studentů s teoretickým modelem můžeme zjistit odhad parametrů takového rozdělení a činit závěry, zda je hodnocení „rozumné“. Zároveň lze popsat věrohodnost našich závěrů.

Daleko zajímavější vývody ovšem můžeme činit, když porovnáním statistik pro různé veličiny budeme moci dovozovat informace o souvislostech (*korelace*, *závislost*). Pokud např. neexistuje žádná doložitelná souvislost mezi historií předchozího studia a výsledky v dané přednášce, je jedním z možných vysvětlení závěr, že je přednáška (nebo její hodnocení) prostě špatná.

Daleko zajímavější vývody ovšem můžeme činit, když porovnáním statistik pro různé veličiny budeme moci dovozovat informace o souvislostech (*korelace*, *závislost*). Pokud např. neexistuje žádná doložitelná souvislost mezi historií předchozího studia a výsledky v dané přednášce, je jedním z možných vysvětlení závěr, že je přednáška (nebo její hodnocení) prostě špatná.

Závěr úvodních úvah:

- V matematice pracujeme s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti.
- Vývody pro konktrétní soubory dat, pro které je zvolený model relevantní, dává matematická statistika.
- To, zda je takový popis adekvátní pro konkrétní výběr dat, je také možné podpořit nebo zavrhnout pomocí metod matematické statistiky.

Plán přednášky

Připomeneme (a trochu zobecníme) pojmy a výsledky z prvního semestru.

Definice (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.

Připomeneme (a trochu zobecníme) pojmy a výsledky z prvního semestru.

Definice (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Prvky $\omega \in \Omega$ představují jednotlivé **možné výsledky**, též **elementární jevy**[a].

Připomeneme (a trochu zobecníme) pojmy a výsledky z prvního semestru.

Definice (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Prvky $\omega \in \Omega$ představují jednotlivé **možné výsledky**, též **elementární jevy**[a].
Systém (ne nutně všech) podmnožin $\mathcal{A}$ základního prostoru se nazývá **jevové pole** a jeho prvky se nazývají **jevy**, jestliže

- $\Omega \in \mathcal{A}$, tj. základní prostor, je jevem,
- je-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl,
- je-li $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$ nejvýše spočetný systém jevů, pak také jejich sjednocení je jevem, tj. $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

[a] Přesněji: elementárním jevem je $\{\omega\}$.

Důsledek

- *Komplement* $A^c = \Omega \setminus A$ *jevu* A *je jevem, který nazýváme* opačný jev *k jevu* A.

Důsledek

- *Komplement* $A^c = \Omega \setminus A$ *jevu* A *je jevem, který nazýváme* opačný jev *k jevu* A*.*
- *Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny* $A, B \subset \Omega$ *platí*

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Takový systém množin $\mathcal{A}$ se pak nazývá σ-algebra.

Důsledek

- *Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme* opačný jev *k jevu A.*
- *Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny $A, B \subset \Omega$ platí*

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Takový systém množin $\mathcal{A}$ se pak nazývá σ-algebra.
Jevové pole je tedy systém podmnožin základního prostoru uzavřený na konečné průniky, spočetná sjednocení a množinové rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za **důsledek** jev B, když $A \subset B$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i\in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i\in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za **důsledek** jev B, když $A \subset B$,
- je-li $A \in \mathcal{A}$, pak se jev $B = \Omega \setminus A$ nazývá **opačný jev k jevu** A, píšeme $B = A^c$.

Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledek

Pro všechny jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí

- $P(\emptyset) = 0, \; 0 \leq P(A) \leq 1,$

Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledek

Pro všechny jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí

- $P(\emptyset) = 0, \ 0 \leq P(A) \leq 1,$
- $P(A^c) = 1 - P(A),$

Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledek

Pro všechny jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí

- $P(\emptyset) = 0, \; 0 \leq P(A) \leq 1,$
- $P(A^c) = 1 - P(A),$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B), \; P(B \setminus A) = P(B) - P(A),$

Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledek

Pro všechny jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí

- $P(\emptyset) = 0,\ 0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Podobná tvrzení platí i pro nekonečné posloupnosti jevů:

Tvrzení

Pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *platí:*

- *Je-li* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, *pak*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i),$$

Podobná tvrzení platí i pro nekonečné posloupnosti jevů:

Tvrzení

Pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *platí:*

- *Je-li* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, *pak*

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i \to \infty} P(A_i),$$

- *Je-li* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, *pak*

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i \to \infty} P(A_i),$$

Podobná tvrzení platí i pro nekonečné posloupnosti jevů:

Tvrzení

Pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ platí:

- *Je-li $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, pak*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i),$$

- *Je-li $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, pak*

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i),$$

- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,

Podobná tvrzení platí i pro nekonečné posloupnosti jevů:

Tvrzení

Pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *platí:*

- *Je-li* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, *pak*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i),$$

- *Je-li* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, *pak*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i),$$

- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,
- $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty}(1 - P(A_i))$.

Příklad

Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev A znamená, že padne liché číslo, jev B, padne-li prvočíslo.

a) Určete základní prostor Ω.

b) Uveďte všechny možné výsledky příznivé nastoupení jevů A, B.

c) Pomocí A, B a operací s jevy vyjádřete:
   - padne sudé číslo,
   - padne číslo 2,
   - padne číslo 2 nebo 3

d) Určete nejmenší jevové pole $(\Omega, \mathcal{A})$, obsahující jevy A i B.

Klasická pravděpodobnost

Připomeňme si klasickou konečnou pravděpodobnost.

Klasická pravděpodobnost

Připomeňme si klasickou konečnou pravděpodobnost.

Definice

Nechť Ω je konečný základní prostor a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je právě systém všech podmnožin v Ω. **Klasická pravděpodobnost** je pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s pravděpodobnostní funkcí $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zjevně takto zadaná funkce skutečně definuje pravděpodobnost, kdy všem elementárním jevům přiřazujeme stejnou pravděpodobnost.

Že s klasickou pravděpodobností nevystačíme, ukazují následující příklady:

Příklad

- Cestou z Kotlářské na Botanickou jsem ztratil zadání písemky. Určete pravděpodobnost jevu ω_X slovně vyjádřeného: *ztracená písemka se nachází nejblíže k zastávce trolejbusu* X.

Že s klasickou pravděpodobností nevystačíme, ukazují následující příklady:

Příklad

- Cestou z Kotlářské na Botanickou jsem ztratil zadání písemky. Určete pravděpodobnost jevu ω_X slovně vyjádřeného: *ztracená písemka se nachází nejblíže k zastávce trolejbusu* X.
- Určete pravděpodobnost, jevu ω_k: *při opakovaném hodu mincí padne hlava poprvé při* k*-tém pokusu*.

Že s klasickou pravděpodobností nevystačíme, ukazují následující příklady:

Příklad

- Cestou z Kotlářské na Botanickou jsem ztratil zadání písemky. Určete pravděpodobnost jevu ω_X slovně vyjádřeného: *ztracená písemka se nachází nejblíže k zastávce trolejbusu* X.
- Určete pravděpodobnost, jevu ω_k: *při opakovaném hodu mincí padne hlava poprvé při* k*-tém pokusu*.

Že s klasickou pravděpodobností nevystačíme, ukazují následující příklady:

Příklad

- Cestou z Kotlářské na Botanickou jsem ztratil zadání písemky. Určete pravděpodobnost jevu ω_X slovně vyjádřeného: *ztracená písemka se nachází nejblíže k zastávce trolejbusu* X.
- Určete pravděpodobnost, jevu ω_k: *při opakovaném hodu mincí padne hlava poprvé při* k*-tém pokusu*.

V prvním případě je třeba pracovat s nekonečně mnoha stejně pravděpodobnými elementárními jevy: *písemku jsem ztratil v bodě* (x, y) , ve druhém pak musíme připustit teoretickou možnost, že hlava nepadne nikdy, a prostorem jevů tedy bude $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Geometrická pravděpodobnost

V praktických problémech se často setkáváme s daleko složitějšími modely, kde základní prostor není konečnou množinou. Uvažme rovinu $\mathbb{R}^2$ dvojic reálných čísel a v ní podmnožinu Ω se známým obsahem $\operatorname{vol}\Omega$ (tedy např. takovou, že Ω je Riemannovsky měřitelná)). Náhodné jevy budou reprezentovány podmnožinami $A \subseteq \Omega$ a za jevové pole $\mathcal{A}$ bereme nějaký vhodný systém podmnožin, u kterých umíme určit jejich obsah. Nastoupení nebo nenastoupení jevu je dáno výběrem bodu v Ω, kterým se trefíme nebo netrefíme do množiny reprezentující jev A.

Geometrická pravděpodobnost

V praktických problémech se často setkáváme s daleko složitějšími modely, kde základní prostor není konečnou množinou. Uvažme rovinu $\mathbb{R}^2$ dvojic reálných čísel a v ní podmnožinu Ω se známým obsahem $\operatorname{vol}\Omega$ (tedy např. takovou, že Ω je Riemannovsky měřitelná)). Náhodné jevy budou reprezentovány podmnožinami $A \subseteq \Omega$ a za jevové pole $\mathcal{A}$ bereme nějaký vhodný systém podmnožin, u kterých umíme určit jejich obsah. Nastoupení nebo nenastoupení jevu je dáno výběrem bodu v Ω, kterým se trefíme nebo netrefíme do množiny reprezentující jev A.
Podobně jako u klasické pravděpodobnosti definujeme pravděpodobnostní funkci
$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$P(A) = \frac{\operatorname{vol} A}{\operatorname{vol}\Omega},$$

kde A jsou podmnožiny v rovině, které odpovídají námi vybraným jevům.

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že dvě náhodně zvolená čísla z intervalu $(0, 1)$ budou mít součet menší než 1 a součin větší než $2/9$?

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že dvě náhodně zvolená čísla z intervalu $(0, 1)$ budou mít součet menší než 1 a součin větší než $2/9$?

Příklad (Buffonova úloha)

Rovina je rozdělena rovnoběžkami umístěnými rovnoměrně ve vzdálenosti d. Do roviny je náhodně umístěna jehla délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku?

Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost

Motto:

Je dokázáno, že slavení narozenin je zdraví prospěšné. Statistika ukazuje, že lidé, kteří oslavili nejvíce narozenin, se dožívají nejvyššího věku.

Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost

Motto:

Je dokázáno, že slavení narozenin je zdraví prospěšné. Statistika ukazuje, že lidé, kteří oslavili nejvíce narozenin, se dožívají nejvyššího věku.

Vtip – co je na něm špatně?

Statistik procházel bezpečnostní kontrolou na letišti, když byla v jeho kufru nalezena bomba. Vysvětloval: „Podle statistik je pravděpodobnost přítomnosti bomby v letadle 1:1000. Takže šance, že na palubě budou dvě bomby, je 1:1000000. Tím pádem jsem mnohem více v bezpečí ...“

Obvyklé je také klást dotazy s dodatečnou podmínkou. Např.

- Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?

Obvyklé je také klást dotazy s dodatečnou podmínkou. Např.

- Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?
- Mějme urnu s 10 koulemi. Desetkrát jsem vytáhl kouli, zkontroloval její barvu a vrátil do urny. Jestliže byla vždy bílé barvy, s jakou pravděpodobností jsou všechny koule v urně bílé?

Obvyklé je také klást dotazy s dodatečnou podmínkou. Např.

- Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?
- Mějme urnu s 10 koulemi. Desetkrát jsem vytáhl kouli, zkontroloval její barvu a vrátil do urny. Jestliže byla vždy bílé barvy, s jakou pravděpodobností jsou všechny koule v urně bílé?
- Na dostizích jsou známy pravděpodobnosti vítězství jednotlivých koní. Jak se tyto pravděpodobnosti změní, pokud uprostřed závodu spadne jezdec jednoho z koní ze sedla?

Připomeňme, že formalizovat takové úvahy umíme následovně.

Definice

Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli $\mathcal{A}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. **Podmíněná pravděpodobnost** $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k jevu H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Připomeňme, že formalizovat takové úvahy umíme následovně.

Definice

Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli $\mathcal{A}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. **Podmíněná pravděpodobnost** $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k jevu H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Přirozená definice nezávislosti je, že hypotéza H a jev A jsou nezávislé tehdy, je-li $P(A) = P(A|H)$.
Z výše uvedeného snadno vyplývá *symetričtější* definice:

Připomeňme, že formalizovat takové úvahy umíme následovně.

Definice

Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli $\mathcal{A}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. **Podmíněná pravděpodobnost** $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k jevu H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Přirozená definice nezávislosti je, že hypotéza H a jev A jsou nezávislé tehdy, je-li $P(A) = P(A|H)$.
Z výše uvedeného snadno vyplývá *symetričtější* definice:

Definice

Říkáme, že jevy A a B jsou nezávislé, jestliže

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definice

Říkáme, že jevy $A_1, A_2, \ldots$ jsou nezávislé, jestliže pro každou k-tici $A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}$ z nich platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Definice

Říkáme, že jevy $A_1, A_2, \dots$ jsou nezávislé, jestliže pro každou k-tici $A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}$ z nich platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Příklad

V urně jsou 4 lístky označené 000, 110, 101, 011. Uvažujme pro $i = 1, 2, 3$ náhodné jevy
$A_i = \{$náhodně vytažený lístek má na i-tém místě 1$\}$.

Definice

Říkáme, že jevy $A_1, A_2, \ldots$ jsou nezávislé, jestliže pro každou k-tici $A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}$ z nich platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Příklad

V urně jsou 4 lístky označené 000, 110, 101, 011. Uvažujme pro $i = 1, 2, 3$ náhodné jevy
$A_i = \{$náhodně vytažený lístek má na i-tém místě 1$\}$.
Snadno se vidí, že $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$, dále, že $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ a že $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$.

Definice

Říkáme, že jevy $A_1, A_2, \dots$ jsou nezávislé, jestliže pro každou k-tici $A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}$ z nich platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Příklad

V urně jsou 4 lístky označené 000, 110, 101, 011. Uvažujme pro $i = 1, 2, 3$ náhodné jevy
$A_i = \{$náhodně vytažený lístek má na i-tém místě 1$\}$.
Snadno se vidí, že $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$, dále, že $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ a že $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$. Jevy A_1, A_2, A_3 jsou tedy po dvou nezávislé, ale nejsou nezávislé.

Bayesovy věty

Přepsáním formule pro podmíněnou pravděpodobnost dostáváme

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Věta (Bayesovy věty)

Pro pravděpodobnost jevů A a B platí

1. $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$.
2. $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}$.

Bayesovy věty

Přepsáním formule pro podmíněnou pravděpodobnost dostáváme

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Věta (Bayesovy věty)

Pro pravděpodobnost jevů A a B platí

1. $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$.
2. $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}$.

Důkaz.

První tvrzení je přepsáním předchozí formule, druhé z prvého plyne dosazením $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$. □

Příklad

a) Z urny, v níž je a bílých a b černých koulí, vybereme postupně (bez vracení) dvě koule. Jaká je pravděpodobnost. že druhá koule je bílá, za předpokladu, že první byla bílá.

b) Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Určete pravděpodobnost, že:

- třetí je zmetek za podmínky, že první 2 byly kvalitní.
- první 2 jsou kvalitní a třetí zmetek.

Příklad

a) Z urny, v níž je a bílých a b černých koulí, vybereme postupně (bez vracení) dvě koule. Jaká je pravděpodobnost. že druhá koule je bílá, za předpokladu, že první byla bílá.

b) Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Určete pravděpodobnost, že:
   - třetí je zmetek za podmínky, že první 2 byly kvalitní.
   - první 2 jsou kvalitní a třetí zmetek.

Příklad

Dva střelci vystřelí nezávisle na sobě do téhož terče každý jednu ránu. Po střelbě byl v teči nalezen 1 zásah. Určete pravděpodobnost, že zásah patří 1. střelci, pokud tento trefuje terče s pravděpodobností 0,8, zatímco druhý střelec s pravděpodobností 0,4.

Příklady k procvičení

Příklad

V testu jsou u každé otázky 4 možné odpovědi. Pokud student nezná odpověď, tak hádá (uhodne s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). Dobrý student zná 75% odpovědí, slabý 30%. Jestliže byla určitá otázka zodpovězena správně, určete pravděpodobnost, že student jen hádal, jde-li o:

- dobrého studenta,
- špatného studenta,
- náhodného studenta, kdy navíc víme, že dobrých studentů jsou 2/3.

Příklady k procvičení

Příklad

Turistický oddíl si předává zprávy Morseovou abecedou s těmito vlastnostmi: pokud je odvysílána *tečka*, pak ve 40% případů je přijata čárka (jinak tečka), pokud je odvysílána *čárka*, je v 1/3 případů přijata tečka (jinak čárka). Zpráva obsahuje tečky a čárky v poměru 5 : 3. Určete pravděpodobnost,

- že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá čárka,
- že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá tečka.

Příklady k procvičení

Příklad

Turistický oddíl si předává zprávy Morseovou abecedou s těmito vlastnostmi: pokud je odvysílána *tečka*, pak ve 40% případů je přijata čárka (jinak tečka), pokud je odvysílána *čárka*, je v 1/3 případů přijata tečka (jinak čárka). Zpráva obsahuje tečky a čárky v poměru 5 : 3. Určete pravděpodobnost,

- že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá čárka,
- že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá tečka.

Příklad

Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 9.00 a 10.00[a]. Určete pravděpodobnost, že:

1. první z příchozích nebude muset na druhého čekat déle než 10 minut,
2. osoba Y přijde až jako druhá, jestliže přijde po 9.30.

Specifičnost a senzitivita (citlivost) testu

	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	True positive	**False positive**
Test negativní	**False negative**	True negative
	Senzitivita	Specifičnost

Příklad – preventivní screening

Předpokládejme, že krevní test na HIV pozitivní osoby má 99% správnost v případě osoby skutečně HIV pozitivní (*vysoká citilivost – sensitivity*). Zároveň předpokládejme, že u HIV negativní osoby dopadně test pozitivně v 0,2% případů (*relativně vysoká specifičnost – specificity*).

Příklad – preventivní screening

Předpokládejme, že krevní test na HIV pozitivní osoby má 99% správnost v případě osoby skutečně HIV pozitivní (*vysoká citilivost – sensitivity*). Zároveň předpokládejme, že u HIV negativní osoby dopadně test pozitivně v 0,2% případů (*relativně vysoká specifičnost – specificity*).
Náhodně z populace vybereme osobu a otestujeme pozitivně.
S jakou pravděpodobností je skutečně HIV pozitivní, jestliže četnost výskytu HIV v populaci je p promile (tj. p osob z tisíce je skutečně HIV pozitivní).

Příklad – preventivní screening

Předpokládejme, že krevní test na HIV pozitivní osoby má 99% správnost v případě osoby skutečně HIV pozitivní (*vysoká citilivost – sensitivity*). Zároveň předpokládejme, že u HIV negativní osoby dopadně test pozitivně v 0,2% případů (*relativně vysoká specifičnost – specificity*).
Náhodně z populace vybereme osobu a otestujeme pozitivně.
S jakou pravděpodobností je skutečně HIV pozitivní, jestliže četnost výskytu HIV v populaci je p promile (tj. p osob z tisíce je skutečně HIV pozitivní).
Označme A jev, že je daná osoba HIV pozitivní, a B jev, že daná osoba má pozitivní test. Dle druhé Bayesovy věty je hledaná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{p/1000 \cdot 99/100}{p/1000 \cdot 99/100 + (1000 - p)/1000 \cdot 2/1000}$$

Příklad – preventivní screening, pokr.

Jestliže zvolíme za p nějaké konkrétní četnosti, dostaneme příslušné očekávatelné spolehlivosti testu. V následující tabulce je spočten výsledek pro několik p:

p	100	10	1	0,1
$P(A\|B)$	0,982	0,8333	0,3313	0,0471

Výsledek asi neodpovídá naší intuici a může se zdát šokující ve vztahu k použití takovýchto testů.

Příklad – preventivní screening, pokr.

Jestliže zvolíme za p nějaké konkrétní četnosti, dostaneme příslušné očekávatelné spolehlivosti testu. V následující tabulce je spočten výsledek pro několik p:

p	100	10	1	0,1
$P(A\|B)$	0,982	0,8333	0,3313	0,0471

Výsledek asi neodpovídá naší intuici a může se zdát šokující ve vztahu k použití takovýchto testů.

Poznámka

Sami si můžete podobný výpočet udělat pro tzv. triple test na Downův syndrom, prováděný ve 2. trimestru těhotenství s 70% citlivostí a 5% „false-positive rate“ či pro statistiky svého oblíbeného spamfilteru (např. SpamAssassin s někde udávanou citlivostí 99,64% a specifičností 98.23%).

Triple test a jeho výsledky

Triple test je vyšetření krevního séra na hodnoty choriogonadotropinu, estriolu a alfa-fetoproteinu. Provádí se v druhém trimestru těhotenství a má sloužit k detekci rizik genetických poruch a poruch vývoje nervové trubice. Detekuje poruchy s úspěšností **70%** a naopak **5%** zdravých případů rozpozná jako porušené. Budoucím matkám, u kterých triple test ukáže zvýšené riziko vad plodu, je obvykle doporučeno nějaké další zpřesňující vyšetření, například amniocentéza (odběr plodové vody).

Triple test a jeho výsledky

Triple test je vyšetření krevního séra na hodnoty choriogonadotropinu, estriolu a alfa-fetoproteinu. Provádí se v druhém trimestru těhotenství a má sloužit k detekci rizik genetických poruch a poruch vývoje nervové trubice. Detekuje poruchy s úspěšností **70%** a naopak **5%** zdravých případů rozpozná jako porušené. Budoucím matkám, u kterých triple test ukáže zvýšené riziko vad plodu, je obvykle doporučeno nějaké další zpřesňující vyšetření, například amniocentéza (odběr plodové vody). Uvádí se, že u těhotné ženy ve věku 20–24 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:1500**, u těhotné ženy ve věku 35–39 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:200**.

Triple test a jeho výsledky

Triple test je vyšetření krevního séra na hodnoty choriogonadotropinu, estriolu a alfa-fetoproteinu. Provádí se v druhém trimestru těhotenství a má sloužit k detekci rizik genetických poruch a poruch vývoje nervové trubice.
Detekuje poruchy s úspěšností **70%** a naopak **5%** zdravých případů rozpozná jako porušené. Budoucím matkám, u kterých triple test ukáže zvýšené riziko vad plodu, je obvykle doporučeno nějaké další zpřesňující vyšetření, například amniocentéza (odběr plodové vody). Uvádí se, že u těhotné ženy ve věku 20–24 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:1500**, u těhotné ženy ve věku 35–39 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:200**.
Prozkoumejme (alespoň z matematického hlediska) význam provádění tohoto testu za uvedených předpokladů, kdy se rodí cca 100 tis. dětí ročně, z toho cca 10% ženám ve věku 35–39 let a cca 12% ženám ve věku 20-24 let.

Specifičnost a senzitivita (citlivost) testu

	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	True positive	**False positive**
Test negativní	**False negative**	True negative
	Senzitivita	Specifičnost

Specifičnost a senzitivita (citlivost) testu

	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	True positive	**False positive**
Test negativní	**False negative**	True negative
	Senzitivita	Specifičnost

Triple test	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	70%	5%
Test negativní	30%	95%
	Senzitivita	Specifičnost

Specifičnost a senzitivita (citlivost) testu

	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	True positive	**False positive**
Test negativní	**False negative**	True negative
	Senzitivita	Specifičnost

Triple test	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	70%	5%
Test negativní	30%	95%
	Senzitivita	Specifičnost

Za dříve uvedených předpokladů snadno vypočteme, že pravděpodobnost, že dítě „starší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, je pouhých cca 6,6%. U mladých žen se pak tato pravděpodobnost pohybuje kolem 0,9% a je tedy na zváženou, zda toto plošné testování v dané věkové skupině provádět, pokud navíc uváděné riziko potratu při případné amniocentéze se pohybuje kolem jednoho promile.

Výpočet

Uvažujme (reálný) vzorek deseti tisíc žen ve věku 35–39 let:

Starší ženy	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost	
Test pozitivní	35	497,5	532,5
Test negativní	15	9452,5	9467,5
	50	9950	

Proto lze pravděpodobnost, že dítě „starší" matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, spočítat jako $\frac{35}{532{,}5} \approx 6{,}6\%$.

Výpočet

Uvažujme (reálný) vzorek deseti tisíc žen ve věku 35–39 let:

Starší ženy	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost	
Test pozitivní	35	497,5	532,5
Test negativní	15	9452,5	9467,5
	50	9950	

Proto lze pravděpodobnost, že dítě „starší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, spočítat jako $\frac{35}{532,5} \approx 6,6\%$. A pro 12 tis. žen ve věku 20–24 let dostaneme:

Mladší ženy	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost	
Test pozitivní	5,6	599,6	605,2
Test negativní	2,4	11392,4	11394,8
	8	11992	

Pravděpodobnost, že dítě „mladší“ matky bude skutečně postiženo

Evidentně prostý výběr náhodné osoby a použití jediného testu, byť velmi citlivého a specifického, nejsou vhodné ani na otestování skutečného stavu populace, ani na preventivní vyšetření jednotlivců, pokud nemáme další podpůrné informace a lepší nástroje.

Evidentně prostý výběr náhodné osoby a použití jediného testu, byť velmi citlivého a specifického, nejsou vhodné ani na otestování skutečného stavu populace, ani na preventivní vyšetření jednotlivců, pokud nemáme další podpůrné informace a lepší nástroje.
Právě matematická statistika dává nástroje na kvalifikovanější postupy v medicínské i průmyslové diagnostice, ekonomických modelech, vyhodnocování experimentálních dat atd.

Martingale betting strategy

Příklad

Alešovi zbylo 2500 Kč z pořádání tábora. Aleš není žádný ňouma: 50 Kč přidal z kasičky a rozhodl se jít hrát ruletu na automaty. Aleš sází pouze na barvu. Pravděpodobnost výhry při sázce na barvu je $18/37$.

Martingale betting strategy

Příklad

Alešovi zbylo 2500 Kč z pořádání tábora. Aleš není žádný ňouma: 50 Kč přidal z kasičky a rozhodl se jít hrát ruletu na automaty. Aleš sází pouze na barvu. Pravděpodobnost výhry při sázce na barvu je 18/37. Začíná sázet na 10 Kč a pokud prohraje, v další sázce vsadí dvojnásobek toho, co v předchozí (pokud na to ještě má, pokud ne, tak končí s hrou – byť by měl ještě peníze na nějakou menší sázku). Pokud nějakou sázku vyhraje, v následující sázce hraje opět o 10 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že při tomto postupu vyhraje dalších 2550 Kč? (jakmile bude 2550 Kč v plusu, tak končí).

Řešení

Nejprve spočítejme, kolikrát po sobě může Aleš prohrát. Začíná-li s 10 Kč, tak na n vsazení potřebuje

$$10+20+\cdots+10\cdot 2^{n-1} = 10\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right) = 10\cdot\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right) = 10\cdot(2^n-1).$$

Jak snadno nahlédneme, číslo 2550 je tvaru $10(2^n-1)$ a to pro $n=8$. Aleš tedy může sázet osmkrát po sobě bez ohledu na výsledek sázky, na devět sázek by potřeboval již $10(2^9-1)=5110$ Kč a to v průběhu hry nikdy mít nebude (jakmile bude mít 5100 Kč, tak končí). Aby tedy jeho hra skončila neúspěchem, musel by prohrát osmkrát v řadě. Pravděpodobnost prohry při jedné sázce je $19/37$, pravděpodobnost prohry v osmi po sobě následujících (nezávislých) sázkách je tedy $(19/37)^8 \doteq 0{,}0048$, tedy docela mizivá.

Řešení

Pravděpodobnost, že v těchto osmi hrách vyhraje 10 Kč (při daném postupu) je tedy $1 - (19/37)^8$. Na to, aby vyhrál 2550 Kč, potřebuje 255 krát vyhrát po desetikoruně. Tedy opět podle pravidla součinu je pravděpodobnost výhry

$$\left(1 - \left(\frac{19}{37}\right)^8\right)^{255} \doteq 0{,}29.$$

Tedy pravděpodobnost výhry je nižší, než kdyby vsadil rovnou vše na jednu barvu.