(A) podzim 2014 MB103 - pís. zk 1

1. a) X má hustotu $f_X(x) = 3x^{-4}$ pro $x \in (1, \infty)$.

Distribuční funkce $F_X(x) = \int_1^x 3t^{-4}\,dt = 3\left[-\frac{1}{3}\cdot t^{-3}\right]_1^x = \underline{1 - x^{-3}}$

Střední hodnota: $E(X) = \int_1^\infty t\cdot 3\cdot t^{-4}\,dt = 3\int_1^\infty t^{-3}\,dt = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left[t^{-2}\right]_1^\infty = \underline{\frac{3}{2}}$

Rozptyl: $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, $E(X^2) = \int_1^\infty t^2\cdot 3\cdot t^{-4}\,dt = 3\int_1^\infty t^{-2}\,dt = 3\cdot(-1)\left[t^{-1}\right]_1^\infty = 3$,

odtud $D(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \underline{\frac{3}{4}}$.

b) Jedna porce $X_i \sim N(6;\, 1{,}56)$.

Na šestnáct nezávislých porcí je třeba $Y = \sum_{i=1}^{16} X_i \sim N(6\cdot 16,\, 16\cdot 1{,}56)$.

$P(Y \le 100) = ?$ Transformujeme $\frac{Y-96}{\sqrt{16\cdot 1{,}56}} \sim N(0,1)$.

$P(Y \le 100) = P\left(\frac{Y-96}{4\cdot\sqrt{1{,}56}} \le \frac{100-96}{4\sqrt{1{,}56}}\right) = \Phi(1/\sqrt{1{,}56}) \doteq \Phi(0{,}8) = 0{,}788$,

kde Φ je distr. fce normovaného normálního rozdělení.

Pravděpodobnost, že postačí 100g balíček, je 78,8 %.

2. a) $\underline{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$, $N(0) = N_0$, poločas rozpadu je $T = 5568 \Rightarrow N(T) = N_0/2 \Rightarrow N_0 e^{-\lambda T} = N_0/2$

Tedy $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, odtud $\lambda = \frac{\ln 2}{T} \doteq \underline{1{,}24\cdot 10^{-4}}$

b) ~~Aktivita~~ ~~akt~~ $-N'(t)/m \Rightarrow m = -\frac{N'(t)}{a(t)} = $ konst. Odtud $\frac{-N'(0)}{a_0} = \frac{-N'(t)}{a_1}$

$\Rightarrow N'(t) = \frac{a_1}{a_0}\cdot N'(0)$, kde $N'(t) = -\lambda\cdot N_0\cdot e^{-\lambda t}$.

Tedy $-\lambda N_0\cdot e^{-\lambda t} = \frac{a_1}{a_0}\cdot -\lambda N_0$, odtud $-\lambda t = \ln a_1 - \ln a_0$, tj. $t = \frac{\ln a_0 - \ln a_1}{\lambda} \doteq 15500$

Stáří kvesebu je cca 15500 let, dobu vzniku lze odhadovat na cca 13550 před n. l.

3. a) Definiční obor f: $x+1 \ne 0 \wedge y - y^2 \ge 0 \wedge \sqrt{y-y^2} + x \ge 0 \wedge 1 - y^2 \ge 0 \wedge \sqrt{1-y^2} - x \ge 0$.

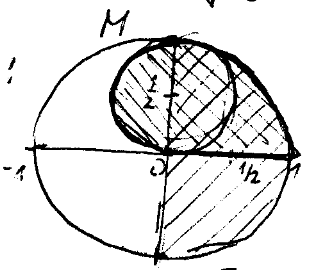
$\underline{x \ne -1} \wedge \underline{0 \le y \le 1} \wedge \underline{\sqrt{y-y^2} \ge -x} \wedge -1 \le y \le 1 \wedge \underline{\sqrt{1-y^2} \ge x}$

Pro $x \le 0$ máme podmínky $x \ne -1 \wedge \sqrt{y-y^2} \ge -x \Leftrightarrow y - y^2 \ge x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le y$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$

Pro $x \ge 0$ máme $x \le \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x^2 \le 1 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 1$

Dále obsah S spočteme integrací v polárních souřadnicích:



$x = r\cos\varphi$ $\quad x^2+y^2 \le 1 \quad x^2+y^2 \le y \quad y \ge 0$

$y = r\sin\varphi$ $\quad r \le 1 \quad r^2 \le r\sin\varphi \quad 0 \le \varphi \le \pi$

$\quad r \le \sin\varphi$

$S = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\sin\varphi} r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}\left[r^2/2\right]_0^{\sin\varphi} d\varphi =$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{3\pi}{8}$.

b) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $y = y(x)$. Derivujeme $\frac{x + y\cdot y'}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y = (x-y)\cdot y'$. Chceme $y' = 0$, tj. $\underline{x = -y}$. Dosadíme $\ln\sqrt{2x^2} = \operatorname{arctg} -1 = -\frac{\pi}{4}$,

tj. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}e^{-\pi/2}}$. Druhá derivace: $1 + y' = (1-y')y' + (x-y)y''$, tj. $y'' = \frac{1}{x-y} = \frac{1}{2x}$. Max $-$ Min $+$

(B) podzim 2014 MB103-pís-Ø1

1\. a) X má hustotu $f_X(x) = 24x^{-4}$ pro $x \in (2,\infty)$

Distribuční funkce $F_X(x) = \int_2^x 24t^{-4}\,dt = 24 \cdot \left[-\frac{1}{3}t^{-3}\right]_2^x = \underline{1 - 8 \cdot x^{-3}}$

Střední hodnota $E(X) = \int_2^\infty t \cdot 24 t^{-4}\,dt = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left[t^{-2}\right]_2^\infty = \underline{3}$

Rozptyl $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$; $E(X^2) = \int_2^\infty t^2 \cdot 24 t^{-4}\,dt = 24 \cdot (-1)\left[t^{-1}\right]_2^\infty = 12$, odkud $D(X) = 12 - 3^2 = \underline{3}$

b) Jedna porce $X_i \sim N(3, \frac{25}{18})$. Na 32 nezávislých porcí je třeba $Y = \sum_{i=1}^{32} X_i \sim N(32 \cdot 3, 32 \cdot \frac{25}{18})$

Přitom transformací $\frac{Y-96}{\sqrt{32 \cdot \frac{25}{18}}} = \frac{Y-96}{20/3} \sim N(0,1)$. Odkud

$P(Y \le 100) = P\left(\frac{Y-96}{20/3} \le \frac{100-96}{20/3}\right) = \Phi\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}7258$. ($\Phi$ je distr. fce norm. normálního rozdělení)

Pravděpodobnost, že 100g balíček bude stačit, je 72,6%.

2\. a) Označme množství v čase t jako $N(t)$. Pak $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$, tj. $\frac{N'}{N} = -\lambda$, odkud $\int \frac{dN}{N} = \int -\lambda\,dt \Rightarrow \ln N = -\lambda t + C$, tj. $N = k \cdot e^{-\lambda t}$.

Pro $t=0$ je $k = N(0) = N_0$, tj. počáteční množství. $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

Poločas rozpadu: $\frac{1}{2}N_0 = N_0\, e^{-\lambda T}$, odkud $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 1{,}24 \cdot 10^{-4}$.

b) $\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t}$, přitom ze zadání je $\frac{N(t)}{N_0} = 0{,}145 = e^{-\lambda t}$, odkud $t = -\frac{\ln 0{,}145}{\lambda} =$

$= 15511$. Dobu vzniku lze odhadnout na cca 13560 př. n. l.

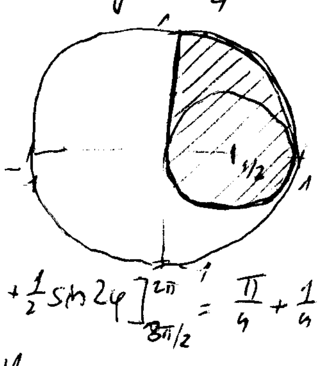
3\. a) Definiční obor f: $1-x^2 \ge 0 \wedge \sqrt{1-x^2} - y \ge 0 \wedge x+2 \ne 0 \wedge x - x^2 \ge 0 \wedge \sqrt{x-x^2} + y \ge 0$

$\underline{-1 \le x \le 1} \wedge \underline{y \le \sqrt{1-x^2}} \wedge \underline{x \ne -2} \wedge \underline{0 \le x \le 1} \wedge \underline{\sqrt{x-x^2} \ge -y}$.

Pro $y \le 0$: $\sqrt{x-x^2} \ge -y \iff x - x^2 \ge y^2 \iff x^2 + y^2 \le x \iff (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$

Pro $y \ge 0$: $\sqrt{1-x^2} \ge y \iff 1 - x^2 \ge y^2 \iff x^2 + y^2 \le 1$

Obsah vypočteme integrací v polárních souřadnicích:



pro $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$ je $0 \le r \le 1$, pro $\varphi \in \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ je $x^2+y^2 \le x$, $r^2 \le r\cos\varphi$, $r \le \cos\varphi$

$S = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\int_0^{\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi =$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{3\pi/2}^{2\pi} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$.

b) Plocha $\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0$, hledáme tečnou rovinu a normálu v $[2, \frac{4}{3}, -1]$

Normála: $(\frac{2x_0}{2}, -3, 4z_0) = (2, -3, -4)$, tečná rovina je $2x - 3y - 4z = 2\cdot 2 - 3 \cdot \frac{4}{3} - 4 \cdot (-1)$

$\underline{2x - 3y - 4z = 4}$

Normála: $[2, \frac{4}{3}, -1] + t\,(2, -3, -4)$.

(C) podzim 2014 MB103 - pis - 7 8 1

1.
a) $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,1)$ $\quad Y = 6 - 2X_1 - X_2$

$E(Y) = 6 - 2E(X_1) - E(X_2) = 6$

X_1, X_2 nezávislé $\Rightarrow D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$

$D(Y) = (-2)^2 D(X_1) + (-1)^2 D(X_2) = 5$

Z vlastností normálně rozdělených n.v. proto platí $Y \sim N(6,5)$.

Protože $\frac{Y-6}{\sqrt{5}} \sim N(0,1)$, vypočteme dolní kvartil: $\frac{1}{4} = P(Y < \alpha) = P\left(\frac{Y-6}{\sqrt{5}} < \frac{\alpha - 6}{\sqrt{5}}\right)$, tj.

$\Phi\left(\frac{\alpha-6}{\sqrt{5}}\right) = 0{,}25 \iff \frac{\alpha - 6}{\sqrt{5}} \doteq -0{,}7$ (neboť $\Phi(0{,}7) = 0{,}758$, přesněji $\Phi^{-1}(0{,}75) = 0{,}68$).

Odtud $\alpha \doteq -0{,}7\sqrt{5} + 6 = -7{,}57$ (příp. přesněji $\alpha \doteq -7{,}52$).

Dále $E(X_1 Y) = E(X_1 \cdot (6 - 2X_1 - X_2)) = 6E(X_1) - 2E(X_1^2) - \underset{\underset{\text{nez.}\ E(X_1)E(X_2)}{\|}}{E(X_1X_2)} = 6 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -2$.

neboť $1 = D(X_1) = E(X_1^2) - \underbrace{E(X_1)^2}_{=0} = E(X_1^2)$

b) Počet kyžených kartiček je n.v. X_n s rozdělením $Bi(n, \frac{1}{26})$.

Hledáme n, aby $0{,}99 = P(X_n \geq 1) = P\left(\underbrace{\frac{X_n - n/26}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{25}{26}}}}_{\sim N(0,1)} \geq \frac{1 - n/26}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{25}{26}}}\right)$. Podle Moivre-Laplaceovy věty má $\frac{X_n - n/26}{\frac{5}{26}\sqrt{n}}$ přibližně rozdělení $N(0,1)$. $0{,}99 = P\left(\frac{X_n - n/26}{\frac{5}{26} \cdot \sqrt{n}} \geq \frac{26 - n}{5\sqrt{n}}\right)$,

právě když $\Phi\left(\frac{n-26}{5\sqrt{n}}\right) = 0{,}99$ [neboť $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$], tj. $\frac{n-26}{5\sqrt{n}} = 2{,}33 \iff$

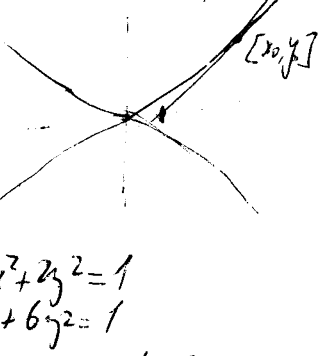
$\iff n - 11{,}65\sqrt{n} - 26 = 0$. Řešení kvadratické rovnice je $\sqrt{n} = 13{,}566$ nebo $\sqrt{n} \doteq -1{,}916$ (vyhovuje jen kladné řešení), odtud $n \doteq 184{,}05$. Petřík musí koupit aspoň 185 jog.

2. Tečna k $y = f(x)$ v $[x_0, y_0]$ má rovnici $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ a protne přímku $y = 0$ v bodě $[\frac{x_0}{3}, 0]$: $\; -f(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{x_0}{3} - x_0\right)$, tj. $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{3}{2x_0}$. ($y_0 = f(x_0)$)

Hledáme $y = f(x)$, aby $\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x}$. Integrací $\ln|y| = \frac{3}{2}\ln|x| + \ln C$, tj.

$|y| = C \cdot |x|^{3/2}$. Vyhovují funkce, které jsou sjednocením částí y_- a y_+:

$x < 0$: $y_- = \pm C \cdot (-x)^{3/2}$ $\quad x \geq 0$: $y_+ = \pm C \cdot x^{3/2}$



3. Objem je dán funkcí $f(x,y) = xy(1 - 5x^2 - 2y^2)$

a) $f'_x = y(1 - 15x^2 - 2y^2)$, $f'_y = x(1 - 5x^2 - 6y^2)$

Příp. hodnoty x, y: $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $5x^2 + 2y^2 \leq 1 \ (\iff z \geq 0)$

Stac. bod (omezíme se na body uvnitř příp. oblasti, tj. $x > 0, y > 0$): $\quad 15x^2 + 2y^2 = 1$, $5x^2 + 6y^2 = 1$

Řešením je $x = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Na hranici je vždy buď $x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0 \Rightarrow V = 0$.

$f\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8\sqrt{10}}$; zřejmě jde o maximum (jediný stac. bod, hodnota větší než na hranici, omezenost)

b) Hmotnost vypočteme integrací v polárních souřadnicích: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; $2 \leq r \leq 4$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_2^4 \frac{r\cos\varphi}{r^2} \cdot r \, dr \, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_2^4 \cos\varphi \, dr \, d\varphi = 2\left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{4}$$

D 1. a) $X_1 \sim N(0,1)$ $\quad Y = -2-5X_1+3X_2$ podzim 2014 MB103-pis-#1

$X_2 \sim N(0,1)$ $\quad E(Y) = -2-5E(X_1)+3E(X_2) = -2-5\cdot 0+3\cdot 0=-2$

X_1, X_2 nezávislé $\Rightarrow D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2) \Rightarrow D(Y)=(-5)^2D(X_1)+3^2D(X_2)=25+9=34$

Z vlastností normálně rozdělených náh. vel. proto platí $Y\sim N(-2,34)$

Protože $\frac{Y+2}{\sqrt{34}} \sim N(0,1)$, vypočteme horní kvartil: $\frac34 = P(Y<\alpha) = P\left(\frac{Y+2}{\sqrt{34}} < \frac{\alpha+2}{\sqrt{34}}\right)$, tj.

$\Phi\left(\frac{\alpha+2}{\sqrt{34}}\right) = 0,75 \Leftrightarrow \frac{\alpha+2}{\sqrt{34}} \doteq 0,7$ (neboť $\Phi(0,7)=0,758$, přesněji by bylo $\Phi^{-1}(0,75)\doteq 0,68$)

Odtud $\alpha \doteq 0,7\sqrt{34}-2 \doteq 2,08$ (příp. přesněji 1,97).

Dále $E(Y\cdot X_2) = E((-2-5X_1+3X_2)\cdot X_2) = -2E(X_2)-5E(X_1X_2)+3E(X_2^2) = -2\cdot 0-5\cdot 0\cdot 0+3\cdot 1=\underline{3}$

neboť $1=D(X_2)=E(X_2^2)-\underbrace{E(X_2)}_{=0}{}^2=E(X_2^2)$.

b) Počet bezvadných konzerv je n.v. s rozdělením $X_n\sim Bi(n;0,9)$. Hledáme n, aby

$0,99 = P(X_n\ge 50) = P\left(\frac{X_n-0,9n}{\sqrt{n\cdot 0,9\cdot 0,1}} \ge \frac{50-0,9n}{\sqrt{n\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)$. Podle Moivre-Laplaceovy věty

má $\frac{X_n-0,9n}{0,3\sqrt n}$ přibližně rozdělení $N(0,1)$. Hledáme tedy n, aby $\Phi\left(\frac{0,9n-50}{0,3\sqrt n}\right)=0,99$

(neboť $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$), tj. $\frac{0,9n-50}{0,3\sqrt n} = 2,33 \Leftrightarrow 0,9n-0,7\sqrt n-50=0$.

Ta má jediné kladné řešení $\sqrt n \doteq 7,853$, odtud $n\doteq 61,66$. Musí vzít aspoň 62 konzerv.

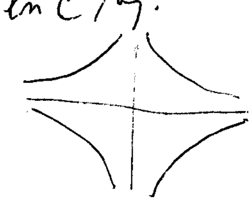
2. Tečna k $y=f(x)$ v $[x_0; y_0]$ ($y_0=f(x_0)$) má rovnici $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ a protne

přímku $y=0$ v $[2x_0, 0]$: $-f(x_0)=f'(x_0)(2x_0-x_0)$, tj. $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = -\frac{1}{x_0}$.

Hledáme $y=f(x)$, aby $\frac{y'}{y} = -\frac1x$. Integrací $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$, tj.

$|y| = \frac{C}{|x|}$. Tedy $y=\frac1x$, $y=-\frac1x$, $y=\frac1{|x|}$, $y=-\frac1{|x|}$

jsou všechna řešení.



3. a) Objem je dán funkcí $f(x,y) = xy(1-4x^2-3y^2)$

$f'_x = y(1-12x^2-3y^2)$, $f'_y = x(1-4x^2-9y^2)$

Přípustný obor pro x,y: $0\le x\le \frac12$, $0\le y\le\frac1{\sqrt3}$, $4x^2+3y^2\le 1$ $(\Leftrightarrow z\ge 0)$

Určíme stacionární bod (a omezíme se na body uvnitř přípustné oblasti, tj. $x>0, y>0$):

Soustava $\begin{matrix} 12x^2+3y^2=1 \\ 4x^2+9y^2=1 \end{matrix}$ má řešení $x=\frac14$, $y=\frac1{2\sqrt3}$, což je jediný stac. bod (uvnitř).

Na hranici je vždy buď $x=0 \vee y=0 \vee z=1-4x^2-3y^2=0$, proto $f(x,y)=0$

$f\left(\frac14,\frac1{2\sqrt3}\right) = \frac14\cdot\frac1{2\sqrt3}\cdot\frac12 = \frac1{16\sqrt3}$. Jde o maximum, neboť f je na oblasti omezená

a hodnota ve stac. bodě je větší než na hranici.

b) Hmotnost vypočteme integrací v polárních souřadnicích: $0\le\varphi\le\pi$, $1\le r\le 3$

$\int_0^\pi\int_1^3 \frac{r\sin\varphi}{r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^\pi\int_1^3 \sin\varphi\,dr\,d\varphi = 2[-\cos\varphi]_0^\pi = \underline{4}$