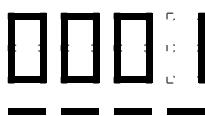


Jméno:

Skupina: A

Místo:

1. zkouška



příklad



učo



body



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů):

**Příklad 1**

- (a) Náhodná veličina  $X$  má hustotu  $f_X(x) = \frac{3}{x^4}$  pro  $x \in (1, \infty)$  a jinde nulovou.  
Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl. (3)
- (b) Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s rozdělením  $N(6g; 1,56g^2)$ .  
Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček. (3)

Jméno:

Skupina: A

Místo:

1. zkouška



příklad



učo



body



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Diferenciální rovnice (6 bodů):****Příklad 2**

Jedna z metod určování stáří artefaktů je tzv. radioaktivní metoda. Kosmické záření produkuje radioaktivní izotop uhlíku C14 (poločas rozpadu  $T = 5568$  let). Tento izotop je absorbován zelenými rostlinami. Do těla živočichů se dostává potravou. V živých tkáních živočichů i rostlin je dávka C14 v rovnováze s množstvím rozpadlého C14. Když organismus zemře, přestane přijímat C14 a tak se koncentrace C14 začne snižovat. Za předpokladu konstantní aktivity kosmického záření lze usuzovat, že množství C14 v živých tkáních je pořád stejné. Z toho lze odvodit přibližné stáří vzorků.

- Rozpad prvku se řídí rovnici  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ , kde  $N(t)$  je množství látky v čase  $t$ ,  $N_0$  udává množství látky na začátku (v čase  $t = 0$ ) a  $\lambda$  je konstanta. Určete konstantu  $\lambda$  pro uhlík C14.
- Dřevěné uhlí z doby osídlení jeskyně Lascaux vykazovalo v roce 1950 aktivitu  $a_1 = 0,97 \text{ min}^{-1} \text{ g}^{-1}$ , živé dřevo mělo  $a_0 = 6,68 \text{ min}^{-1} \text{ g}^{-1}$ . Aktivita je definována vztahem  $a = -N'(t)/m$ , kde  $m$  je hmotnost vzorku. Odhadněte dobu vzniku kreseb uhlím v jeskyni.

Jméno:

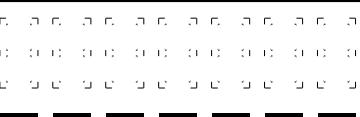
Skupina: A

Místo:

1. zkouška



příklad



body



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aplikace diferenciálního a integrálního počtu (8 bodů):

**Příklad 3**

- (a) Nechť
- $M$
- značí definiční obor funkce

(4)

$$f(x, y) = \frac{1}{x+1} \sqrt{\sqrt{y - y^2} + x} - x^2 \sqrt{\sqrt{1 - y^2} - x}.$$

Zobrazte  $M$  v rovině a pomocí integrálu dvou proměnných vypočtěte obsah množiny  $M$ .

- (b) Najděte lokální extrémy (a jejich typ) funkce
- $y = y(x)$
- dané implicitně rovnicí

(4)

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Jméno:

Skupina: B

Místo:

1. zkouška

příklad

učo

body

Náhodné veličiny (6 bodů):

**Příklad 1**

- (a) Náhodná veličina  $X$  má hustotu  $f_X(x) = \frac{24}{x^4}$  pro  $x \in (2, \infty)$  a jinde nulovou.  
Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl. (3)
- (b) Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s rozdělením  $N(3g; \frac{25}{18}g^2)$ .  
Určete pravděpodobnost, že k přípravě 32 porcí kávy postačí jeden 100g balíček. (3)

Jméno:

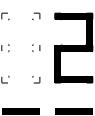
Skupina: B

Místo:

1. zkouška



příklad



body



123456789

**Diferenciální rovnice (6 bodů):****Příklad 2**

Jedna z metod určování stáří artefaktů je tzv. radioaktivní metoda. Kosmické záření produkuje radioaktivní izotop uhlíku C14 (poločas rozpadu  $T = 5568$  let). Tento izotop je absorbován zelenými rostlinami. Do těla živočichů se dostává potravou. V živých tkáních živočichů i rostlin je dávka C14 v rovnováze s množstvím rozpadlého C14. Když organismus zemře, přestane přijímat C14 a tak se koncentrace C14 začne snižovat. Za předpokladu konstantní aktivity kosmického záření lze usuzovat, že množství C14 v živých tkáních je pořád stejné. Z toho lze odvodit přibližné stáří vzorků.

- Úbytek prvku v určitém časovém intervalu je přímo úměrný (konstantu označme  $\lambda$ ) jeho množství na začátku intervalu. Sestavte odpovídající diferenciální rovnici, vyřešte ji a určete  $\lambda$  pro uhlík C14.
- Dřevěné uhlí z doby osídlení jeskyně Lascaux mělo v roce 1950 obsah uhlíku C14 vůči jeho původní hodnotě 14,5%. Odhadněte dobu vzniku kreseb uhlím v jeskyni.

Jméno:

Skupina: B

Místo:

1. zkouška



příklad



učo



body



123456789

## Aplikace diferenciálního a integrálního počtu (8 bodů):

**Příklad 3**

- (a) Nechť
- $M$
- značí definiční obor funkce
- (4)

$$f(x, y) = y^2 \sqrt{\sqrt{1-x^2} - y} - \frac{1}{x+2} \sqrt{\sqrt{x-x^2} + y}.$$

Zobrazte  $M$  v rovině a pomocí integrálu dvou proměnných vypočtěte obsah množiny  $M$ .

- (b) Určete rovnici tečné roviny a normály v bodě
- $[2, \frac{4}{3}, -1]$
- k ploše zadáné implicitně rovnicí
- (4)

$$\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0.$$

Jméno:

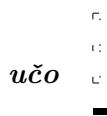
Skupina: C

Místo:

1. zkouška



příklad



body



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů):

**Příklad 1**

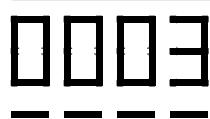
- (a) Nechť jsou  $X_1, X_2$  stochasticky nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny  $Y = 6 - 2X_1 - X_2$  a najděte její dolní kvartil. Dále vypočtěte  $E(X_1 \cdot Y)$ . (3)
- (b) Ke každému jogurtu „běžné značky“ je náhodně (rovnoměrně) přibalen obrázek některého z 26 fotbalových reprezentantů. Kolik jogurtů si musí Petřík koupit, aby s pravděpodobností 0,99 získal alespoň jednu kartičku svého oblíbence Davida Lafaty? (3)

Jméno:

Skupina: C

Místo:

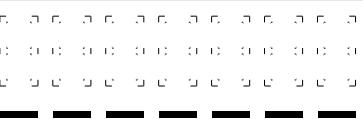
1. zkouška



příklad



učo



body



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Diferenciální rovnice (6 bodů): Určete všechny funkce  $y = f(x)$ , pro které platí, že tečna k jejich grafu v libovolném jeho bodě  $[x_0, y_0]$  protíná osu  $x$  v bodě  $[\frac{x_0}{3}, 0]$ . (Sestavte nejprve diferenciální rovnici a tu vyřešte.)

**Příklad 2**

Jméno:

Skupina: C

Místo:

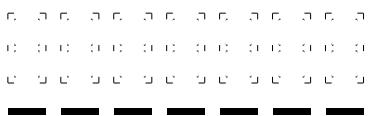
1. zkouška



příklad



učo



body



0123456789

## Aplikace diferenciálního a integrálního počtu (8 bodů):

**Příklad 3**

- (a) Krabice ve tvaru kvádru je umístěna v prvním oktaantu ( $x, y, z \geq 0$ ) tak, že jeden vrchol je umístěn v počátku a s ním incidentní stěny leží v souřadných rovinách. Protější vrchol  $V = [x, y, z]$  leží na ploše  $5x^2 + 2y^2 + z = 1$ . Zapište vztah pro objem  $f(x, y)$  kvádru v závislosti na  $x, y$  a explicitně vyjádřete přípustný obor pro hodnoty  $x, y$ . Dále nalezněte maximum  $f$  pro hodnoty  $x, y$  v přípustném oboru (nezapomeňte zdůvodnit, že jde skutečně o globální maximum). (4)
- (b) Určete hmotnost tělesa, které je tvořeno částí mezikruží  $4 < x^2 + y^2 < 16$  ležící v polovině  $x \geq 0$ , je-li hustota v bodě  $[x, y]$  rovna  $\frac{x}{x^2+y^2}$ . (4)

Jméno:

Skupina: D

Místo:

1. zkouška

0004

*příklad*

— — — — |

— — — — — — — — — |

*učo**body*

— — — — — — — — — |

— — — — — — — — — |

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Náhodné veličiny (6 bodů):****Příklad 1**

- (a) Nechť jsou  $X_1, X_2$  stochasticky nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny  $Y = -2 - 5X_1 + 3X_2$  a najděte její horní kvartil. Dále vypočtěte  $E(Y \cdot X_2)$ . (3)
- (b) Náhodně vybraná konzerva v armádním skladu je vadná s pravděpodobností 0,1. Kolik konzerv musí zásobovací důstojník ze skladu vzít, aby mezi nimi bylo s pravděpodobností 0,99 alespoň 50 bezvadných konzerv. (Předpokládejte náhodné vydávání konzerv). (3)

Jméno:

Skupina: D

Místo:

1. zkouška

0004

příklad

2

učo

123456789

123456789

body

123456789

Diferenciální rovnice (6 bodů): Určete všechny funkce  $y = f(x)$ , pro které platí, že tečna k jejich grafu v libovolném jeho bodě  $[x_0, y_0]$  protíná osu  $x$  v bodě  $[2x_0, 0]$ . (Sestavte nejprve diferenciální rovnici a tu vyřešte.)

**Příklad 2**

Jméno:

Skupina: D

Místo:

1. zkouška

0004

příklad

3

učo

aaaaaaa  
ooooooo  
ccccccc  
sssssss  
-----  
0123456789

aaaaaaa  
ooooooo  
ccccccc  
sssssss  
-----  
0123456789

## Aplikace diferenciálního a integrálního počtu (8 bodů):

## Příklad 3

- (a) Krabice ve tvaru kvádru je umístěna v prvním oktaantu ( $x, y, z \geq 0$ ) tak, že jeden vrchol je umístěn v počátku a s ním incidentní stěny leží v souřadných rovinách. Protější vrchol  $V = [x, y, z]$  leží na ploše  $4x^2 + 3y^2 + z = 1$ . Zapište vztah pro objem  $f(x, y)$  kvádru v závislosti na  $x, y$  a explicitně vyjádřete přípustný obor pro hodnoty  $x, y$ . Dále nalezněte maximum  $f$  pro hodnoty  $x, y$  v přípustném oboru (nezapomeňte zdůvodnit, že jde skutečně o globální maximum). (4)
- (b) Určete hmotnost tělesa, které je tvořeno částí mezikruží  $1 < x^2 + y^2 < 9$  ležící v horní polovině ( $y \geq 0$ ), je-li hustota v bodě  $[x, y]$  rovna  $\frac{y}{x^2+y^2}$ . (4)