Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

příklad ***učo*** ***body***

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Náhodná veličina X má hustotu $f_X(x) = \frac{3}{x^4}$ pro $x \in (1, \infty)$ a jinde nulovou.
Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl. (3)

(b) Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s rozdělením $N(6\text{g}; 1{,}56\text{g}^2)$.
Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček. (3)

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

příklad *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Diferenciální rovnice (6 bodů):

Příklad 2

Jedna z metod určování stáří artefaktů je tzv. radioaktivní metoda. Kosmické záření produkuje radioaktivní izotop uhlíku C14 (poločas rozpadu T = 5568 let). Tento izotop je absorbován zelenými rostlinami. Do těla živočichů se dostává potravou. V živých tkáních živočichů i rostlin je dávka C14 v rovnováze s množstvím rozpadlého C14. Když organismus zemře, přestane přijímat C14 a tak se koncentrace C14 začne snižovat. Za předpokladu konstantní aktivity kosmického záření lze usuzovat, že množství C14 v živých tkáních je pořád stejné. Z toho lze odvodit přibližné stáří vzorků.

(a) Rozpad prvku se řídí rovnici $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, kde $N(t)$ je množství látky v čase t, N_0 udává množství látky na začátku (v čase $t = 0$) a λ je konstanta. Určete konstantu λ pro uhlík C14.

(b) Dřevěné uhlí z doby osídlení jeskyně Lascaux vykazovalo v roce 1950 aktivitu $a_1 = 0{,}97\,\mathrm{min}^{-1}\,\mathrm{g}^{-1}$, živé dřevo mělo $a_0 = 6{,}68\,\mathrm{min}^{-1}\,\mathrm{g}^{-1}$. Aktivita je definována vztahem $a = -N'(t)/m$, kde m je hmotnost vzorku. Odhadněte dobu vzniku kreseb uhlím v jeskyni.

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

0001 *příklad* 3 *učo* *body*

0123456789

Aplikace diferenciálního a integrálního počtu (8 bodů):

Příklad 3

(a) Nechť M značí definiční obor funkce (4)

$$f(x,y) = \tfrac{1}{x+1}\sqrt{\sqrt{y-y^2}+x} - x^2\sqrt{\sqrt{1-y^2}-x}.$$

Zobrazte M v rovině a pomocí integrálu dvou proměnných vypočtěte obsah množiny M.

(b) Najděte lokální extrémy (a jejich typ) funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí (4)

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 *příklad* 1 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Náhodná veličina X má hustotu $f_X(x) = \frac{24}{x^4}$ pro $x \in (2, \infty)$ a jinde nulovou.
Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl. (3)

(b) Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s rozdělením $N(3\text{g}; \frac{25}{18}\text{g}^2)$.
Určete pravděpodobnost, že k přípravě 32 porcí kávy postačí jeden 100g balíček. (3)

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Diferenciální rovnice (6 bodů):

Příklad 2

Jedna z metod určování stáří artefaktů je tzv. radioaktivní metoda. Kosmické záření produkuje radioaktivní izotop uhlíku C14 (poločas rozpadu T = 5568 let). Tento izotop je absorbován zelenými rostlinami. Do těla živočichů se dostává potravou. V živých tkáních živočichů i rostlin je dávka C14 v rovnováze s množstvím rozpadlého C14. Když organismus zemře, přestane přijímat C14 a tak se koncentrace C14 začne snižovat. Za předpokladu konstantní aktivity kosmického záření lze usuzovat, že množství C14 v živých tkáních je pořád stejné. Z toho lze odvodit přibližné stáří vzorků.

(a) Úbytek prvku v určitém časovém intervalu je přímo úměrný (konstantu označme λ) jeho množství na začátku intervalu. Sestavte odpovídající diferenciální rovnici, vyřešte ji a určete λ pro uhlík C14.

(b) Dřevěné uhlí z doby osídlení jeskyně Lascaux mělo v roce 1950 obsah uhlíku C14 vůči jeho původní hodnotě $14,5\%$. Odhadněte dobu vzniku kreseb uhlím v jeskyni.

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 *příklad* 3 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aplikace diferenciálního a integrálního počtu (8 bodů):

Příklad 3

(a) Nechť M značí definiční obor funkce (4)

$$f(x,y) = y^2\sqrt{\sqrt{1-x^2}-y} - \tfrac{1}{x+2}\sqrt{\sqrt{x-x^2}+y}.$$

Zobrazte M v rovině a pomocí integrálu dvou proměnných vypočtěte obsah množiny M.

(b) Určete rovnici tečné roviny a normály v bodě $[2, \frac{4}{3}, -1]$ k ploše zadané implicitně rovnicí (4)

$$\tfrac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0.$$

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

0003 *příklad* 1 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Nechť jsou X_1, X_2 stochasticky nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny $Y = 6 - 2X_1 - X_2$ a najděte její dolní kvartil. Dále vypočtěte $E(X_1 \cdot Y)$. (3)

(b) Ke každému jogurtu „běžné značky“ je náhodně (rovnoměrně) přibalen obrázek některého z 26 fotbalových reprezentantů. Kolik jogurtů si musí Petřík koupit, aby s pravděpodobností 0,99 získal alespoň jednu kartičku svého oblíbence Davida Lafaty? (3)

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

0003 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 2

Diferenciální rovnice (6 bodů): Určete **všechny** funkce $y = f(x)$, pro které platí, že tečna k jejich grafu v libovolném jeho bodě $[x_0, y_0]$ protíná osu x v bodě $[\frac{x_0}{3}, 0]$. (Sestavte nejprve diferenciální rovnici a tu vyřešte.)

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

0003 *příklad* 3 *učo* *body*

0123456789

Aplikace diferenciálního a integrálního počtu (8 bodů):

Příklad 3

(a) Krabice ve tvaru kvádru je umístěna v prvním oktantu ($x, y, z \geq 0$) tak, že jeden vrchol je umístěn v počátku a s ním incidentní stěny leží v souřadných rovinách. Protější vrchol $V = [x, y, z]$ leží na ploše $5x^2 + 2y^2 + z = 1$. Zapište vztah pro objem $f(x, y)$ kvádru v závislosti na x, y a explicitně vyjádřete přípustný obor pro hodnoty x, y. Dále nalezněte maximum f pro hodnoty x, y v přípustném oboru (nezapomeňte zdůvodnit, že jde skutečně o globální maximum). (4)

(b) Určete hmotnost tělesa, které je tvořeno částí mezikruží $4 < x^2 + y^2 < 16$ ležící v polorovině $x \geq 0$, je-li hustota v bodě $[x, y]$ rovna $\frac{x}{x^2+y^2}$. (4)

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

0004 *příklad* 1 *učo* *body*

0123456789

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Nechť jsou X_1, X_2 stochasticky nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny $Y = -2 - 5X_1 + 3X_2$ a najděte její horní kvartil. Dále vypočtěte $E(Y \cdot X_2)$. (3)

(b) Náhodně vybraná konzerva v armádním skladu je vadná s pravděpodobností 0,1. Kolik konzerv musí zásobovací důstojník ze skladu vzít, aby mezi nimi bylo s pravděpodobností 0,99 alespoň 50 bezvadných konzerv. (Předpokládejte náhodné vydávání konzerv). (3)

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

0004 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 2

Diferenciální rovnice (6 bodů): Určete **všechny** funkce $y = f(x)$, pro které platí, že tečna k jejich grafu v libovolném jeho bodě $[x_0, y_0]$ protíná osu x v bodě $[2x_0, 0]$. (Sestavte nejprve diferenciální rovnici a tu vyřešte.)

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

0004 *příklad* 3 *učo* *body*

0123456789

Aplikace diferenciálního a integrálního počtu (8 bodů):

Příklad 3

(a) Krabice ve tvaru kvádru je umístěna v prvním oktantu ($x, y, z \geq 0$) tak, že jeden vrchol je umístěn v počátku a s ním incidentní stěny leží v souřadných rovinách. Protější vrchol $V = [x, y, z]$ leží na ploše $4x^2 + 3y^2 + z = 1$. Zapište vztah pro objem $f(x, y)$ kvádru v závislosti na x, y a explicitně vyjádřete přípustný obor pro hodnoty x, y. Dále nalezněte maximum f pro hodnoty x, y v přípustném oboru (nezapomeňte zdůvodnit, že jde skutečně o globální maximum). (4)

(b) Určete hmotnost tělesa, které je tvořeno částí mezikruží $1 < x^2 + y^2 < 9$ ležící v horní polorovině ($y \geq 0$), je-li hustota v bodě $[x, y]$ rovna $\frac{y}{x^2+y^2}$. (4)