Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **2. zkouška**

0001 *příklad* 1 *učo* *body*

0123456789

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Rozhodněte, zda je rozptyl součtu libovolné dvojice náhodných veličin X, Y roven součtu rozptylů těchto veličin. Vše zdůvodněte (buď dokažte nebo uveďte protipříklad). (2)

(b) Odběratel provádí kontrolu jakosti výrobků namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,1 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10\,\text{mm}; 0,0208\,\text{mm}^2)$. Určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky? (V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte). (4)

a) neplatí u ~~nez~~ závislých náh. veličin.

$X = Y$ = alternativní rozdělení $\quad p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0,1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$D(X) = \theta(1-\theta) = \frac{1}{4}$

$D(X+X) = D(2X) \doteq 4D(X) \doteq 1$

$D(X+X) = 1 \neq \frac{1}{2} = D(X) + D(X)$

b) $P(S \leq 0{,}1) = P(S^2 \leq 0{,}01) = P\left(\frac{20 \cdot S^2}{\sigma^2} \leq \frac{20 \cdot 0{,}01}{0{,}0208}\right) = P\left(\frac{20S^2}{\sigma^2} \leq 9{,}615\right) \doteq 0{,}025$

$P(S \leq 0{,}1) = P(S^2 \leq 0{,}01) = P\left(\frac{3S^2}{\sigma^2} \leq \frac{3 \cdot 0{,}01}{0{,}0208}\right) = P\left(\frac{3S^2}{\sigma^2} \leq 1{,}442\right) = \underline{\underline{0{,}292}}$

$F(0{,}584) = 0{,}1$

$F(2{,}37) = 0{,}5$

$F(1{,}442) = 0{,}292$

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **2. zkouška**

0001 1 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pravděpodobnost (6 bodů): **Příklad 2**

(a) Hodíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost jevů: „padne součet deset“, resp. „padne alespoň jedna pětka“, a rozhodněte, zda jde o stochasticky nezávislé jevy. (2)

(b) V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa. (4)

a) A padne součet 10

B padne alespoň jedna pětka

$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

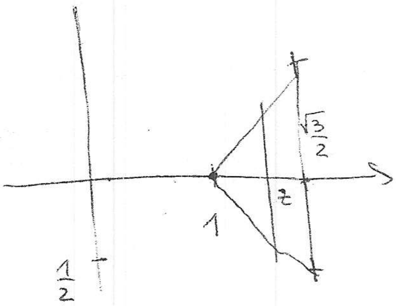
$P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{12} \cdot \frac{25}{36} \neq \frac{1}{36} = P(A \cap B)$

jedná se o stochasticky závislé jevy

b)



$$F(z) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - z}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{3} - 2 - 2z}{\sqrt{3} - 2}\right)^2 & z \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & z \leq 0 \\ 1 & z \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$$

Jméno: Skupina: A Místnost: 2. zkouška

0001 příklad 3 učo body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce (8 bodů):

Příklad 3

(a) Vypočtěte derivaci funkce $f(x, y, z) = x^2y + z^4$ v bodě $[1, 1, 1]$ ve směru vektoru $(1, 3, -1)$ i) z definice; ii) pomocí gradientu (diferenciálu).

(b) Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$ v bodě $[2\sqrt{3}, 2, 4, ?]$.

(c) Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[1, 1]$ implicitně rovnicí $y^3 + xy - 2x^2 = 0$. Určete Taylorův polynom 2. stupně této funkce v bodě $x_0 = 1$.

a) i) $\lim_{t\to 0} \frac{f([1,1,1]+t(1,3,-1)) - f(1,1,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^2(1+3t)+(1-t)^4 - 2}{t} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{t^4 - t^3 + 13t^2 + t}{t} = \lim_{t\to 0} (t^3 - t^2 + 13t + 1) = \underline{1}$

ii) $f'_x(x,y,z) = 2xy$, $f'_y(x,y,z) = x^2$, $f'_z(x,y,z) = 4z^3 \Rightarrow df(1,1,1) = (2,1,4)$

$f'_{(1,3,-1)}(1,1,1) = (2,1,4)\cdot(1,3,-1) = 2+3-4 = \underline{1}$

b) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$ v $A = [2\sqrt{3}, 2, 4, \frac{\pi}{3}]$.

$f'_x(x,y,z) = \frac{yz}{x^2y^2+z^2}$, $f'_y(x,y,z) = \frac{xz}{x^2y^2+z^2}$, $f'_z(x,y,z) = \frac{z^2}{x^2y^2+z^2}\left(-\frac{xy}{z^2}\right) = -\frac{xy}{x^2y^2+z^2}$

$f'_x(A) = \frac{1}{8}$, $f'_y(A) = \frac{\sqrt{3}}{8}$, $f'_z(A) = -\frac{\sqrt{3}}{16}$.

Rovnice tečné nadroviny: $u - u_0 = f'_x(A)(x-x_0) + f'_y(A)(y-y_0) + f'_z(A)(z-z_0)$

$$u - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{16}\left[2(x-2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}(y-2) - \sqrt{3}(z-4)\right]$$

c) $y^3 + xy - 2x^2$ v $[1,1]$ $y = y(x)$.

Derivujeme podle x: $3y^2\cdot y' + y + xy' - 4x = 0$

$y'(3y^2+x) + y - 4x = 0$

v $[1,1]$: $3y' + 1 + y' - 4 = 0$

$y' = \frac{3}{4}$

Derivujeme: $y''(3y^2+x) + y'(6y\cdot y' + 1) + y' - 4 = 0$

$4y'' + \frac{3}{4}\left(6\cdot\frac{3}{4}+1\right) + \frac{3}{4} - 4 = 0$

$y'' = -\frac{7}{32}$

$$T_{y,2}(1)(x) = 1 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{7}{32}\right)(x-1)^2$$

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **2. zkouška**

0002 *příklad* 1 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů): **Příklad 1**

(a) Rozhodněte, zda je směrodatná odchylka součtu libovolné dvojice nezávislých náhodných veličin X, Y rovna součtu směrodatných odchylek těchto veličin. Vše zdůvodněte (buď dokažte nebo uveďte protipříklad). (2)

(b) Odběratel provádí kontrolu jakosti namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,2 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10\,\mathrm{mm}; 0{,}0737\,\mathrm{mm}^2)$. Určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky? (V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte). (4)

a) pro dvojici nezávislých náhodných veličin platí

$$D(X)+D(Y)=D(X+Y) \Rightarrow \sqrt{D(X+Y)}=\sqrt{(D(X)+D(Y)}$$

pro X,Y např. normální standardizované to neplatí

$$\sqrt{2} \neq 2\sqrt{1}$$

b) $n = 21$

$$P(S \leq 0{,}2) = P(S^2 \leq 0{,}04) = P\left(\frac{20S^2}{\sigma^2} \leq \frac{20\cdot 0{,}04}{0{,}0737}\right) =$$

$$= P\left(\frac{20S^2}{\sigma^2} \leq 10{,}85\right) = \underline{0{,}05}$$

$$P(S \leq 0{,}2) = P(S^2 \leq 0{,}04) = P\left(\frac{3S^2}{\sigma^2} \leq \frac{3\cdot 0{,}04}{0{,}0737}\right) = P\left(\frac{3S^2}{\sigma^2} \leq 1{,}628\right)$$

F. distribuční fce $\chi^2(3)$

$F(0{,}548) = 0{,}1$

$F(2{,}37) = 0{,}5$

$F(1{,}628) = 0{,}337$

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **2. zkouška**

0002 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Pravděpodobnost (6 bodů): **Příklad 2**

(a) Hodíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost jevů: „padne součet devět", resp. „padne alespoň jedna pětka", a rozhodněte, zda jde o stochasticky nezávislé jevy. (2)

(b) V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete rozdělení vzdálenosti dítěte od nejdelší strany lesa. (4)

a) A … padne součet 9

B… padne alespoň jedna pětka

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

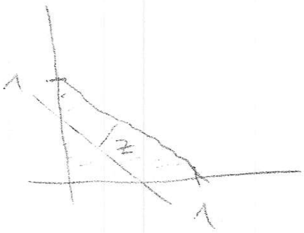
$P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{9} \cdot \frac{11}{36} \neq \frac{1}{18} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ nejedná se o jevy stoch. nez.

b)



$v = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$F(z) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - z}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 = 2\cdot\left(\sqrt{2}z - z^2\right) & 0 \le z \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & z < 0 \\ 1 & z > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Jméno: Skupina: B Místnost: 2. zkouška

0002 příklad 3 učo body

0123456789

Funkce (8 bodů):

Příklad 3

(a) Dokažte, že funkce $f(x,y) = \frac{-y}{x^2-y}$ nemá limitu v bodě $(0,0)$.

(b) Rozhodněte, zda graf funkce $y = y(x)$ zadané implicitně rovnicí $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ leží v bodě $[1,3]$ nad nebo pod svojí tečnou v tomto bodě. Rovnici tečny zapište.

(c) Pomocí Taylorova polynomu stupně 2 se středem v bodě $[1,1]$ odhadněte (a s pomocí kalkulačky vyčíslete) hodnotu funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ pro $[x,y] = [1{,}1; 1{,}2]$.

a) $f(x,y) = \frac{-y}{x^2-y}$. Jmenovatel „nabízí" limitu přechod „po parabole"

$y = kx^2$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-kx^2}{x^2-kx^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-k}{1-k} = \frac{-k}{1-k}$

Závisí na k, proto lim. neexistuje.

b) $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ v $[1,3]$.

Derivujeme podle x: $9x - 3y^2 - 6xy\cdot y' + 3y^2\cdot y' = 0$

$9x - 3y^2 - y'(3y^2 - 6xy) = 0$

v $[1,3]$: $9 - 27 - 18y' + 27y' = 0$

$\underline{y' = 2}$

Znovu derivujeme: $9 - 6y\cdot y' + y''(3y^2 - 6xy) + y'(6y\cdot y' - 6y - 6xy') = 0$

v $[1,3]$: $9 - 18y' + y''(27-18) + y'(12y' - 18) = 0$

$\underline{y'' = \frac{15}{9}}$

$y''(1) = \frac{15}{9} > 0 \Rightarrow$ graf leží nad tečnou.

Rovnice tečny: $y - y_0 = y'(1)(x - x_0)$

$y - 3 = 2(x-1)$

$\underline{\underline{y = 2x + 1}}$

c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ v $[1,1]$.

$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$ $f'_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$

$f''_{xx}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2}$ $f''_{xy}(x,y) = \frac{-2x\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}$ $f''_{yy}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2+1) - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}$

$T_{f,2,(1,1)}(x,y) = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) + \frac{1}{2!}\left((x-1, y-1)(Hf(1,1))\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}\right) =$

$= \ln 3 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{2}{9}(y-1)^2 + 2\left(-\frac{4}{9}\right)(x-1)(y-1)\right)$

$T^2_{f,2;(1,1)}(1{,}1;1{,}2) = \ln 3 + \frac{2}{3}(0{,}1) + \frac{2}{3}(0{,}2) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\cdot 0{,}1^2 + \frac{2}{9}\cdot 0{,}2^2 - \frac{8}{9}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2\right) = \underline{\underline{1{,}283}}$

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **2. zkouška**

0003 *příklad* *učo* *body*

0123456789

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Spojitá náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,3)$. Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$. (2)

(b) Na dvou soustruzích (s teoreticky stejnou variabilitou produkce) se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 14 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 18 z produkce druhého soustruhu. Příslušné výběrové průměry jsou 36,5 mm, resp. 36,0 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0{,}05$. Svůj závěr explicitně zformulujte. (4)

a) $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$f_Y(y) = (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))' = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} =$

$= \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} & y \in (0,9) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

b) $n_1 = 14$ $\quad M_1 = 36{,}5$ $\quad S_1^2 = 1{,}21$ $\quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$n_2 = 18$ $\quad M_2 = 36{,}0$ $\quad S_2^2 = 1{,}44$

$\alpha = 0{,}05$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ .. hypotéza

95% oboustranný interval pro $\mu_1 - \mu_2$

$S_*^2 = (13 \cdot 1{,}21 + 17 \cdot 1{,}44)/30 = 1{,}34$

$36{,}5 - 36{,}0 \pm \sqrt{1{,}34}\sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{18}} \cdot 2{,}0423 = (-0{,}342;\ 1{,}342) \ni 0$

$\Rightarrow$ hypotézu nezamítáme

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **2. zkouška**

0003 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Uvažujte rodiny se třemi dětmi (předpokládáme stejnou pravděpodobnost kterékoliv z osmi kombinací pohlaví – děti rozlišujeme dle věku). Určete pravděpodobnost jevů „rodina má nejvýše jedno děvče“ a „rodina má děvče i chlapce“; rozhodněte, zda jde o nezávislé jevy. (2)

(b) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné a záporné. (4)

a) A.. rodina má nejvýše jedno děvče

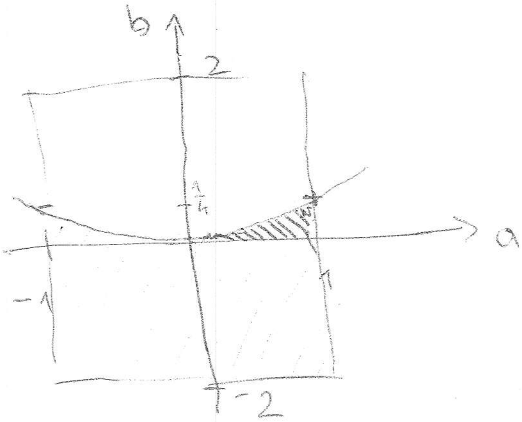
B.. rodina má děvče i chlapce.

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\qquad P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8}$

$P(B) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$ $\qquad \Rightarrow$ jsou to nezávislé jevy

$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

b) x^2+ax+b $\qquad |a| \leq 1, \ |b| \leq 2$



reálné: $a^2 - 4b \geq 0$

$a^2 \geq 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$

záporné: $a = -(x_1+x_2) > 0$

$b = x_1 \cdot x_2 > 0$

$S = \int_0^1 \frac{a^2}{4} da = \left[\frac{a^3}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$ $\qquad S_0 = 2 \cdot 4 = 8$

$P = \frac{S}{S_0} = \frac{\frac{1}{12}}{8} = \underline{\frac{1}{96}}$

Jméno: Skupina: C Místnost: 2. zkouška

0003 příklad 3 učo body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce (8 bodů): **Příklad 3**

(a) Určete směr, v němž funkce $\ln(x + y^2) + z^2$ v bodě $[1, 1, 1]$ nejrychleji roste a určete derivaci v tomto směru.

(b) Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu výrazu $\log_2(1{,}96^2 + 4{,}02)$.

(c) Rozhodněte, zda graf funkce $z = z(x, y)$ zadané implicitně rovnicí $x + y^2 + z^3 + z - 4 = 0$ leží v bodě $[1, 1, 1]$ nad nebo pod svojí tečnou rovinou. Rovnici tečné roviny zapište.

a) $f(x,y,z) = \ln(x+y^2)+z^2$. Nejrychleji roste ve směru gradientu

$(f'_x, f'_y, f'_z) = \left(\frac{1}{x+y^2}, \frac{2y}{x+y^2}, 2z\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, 2\right) =: u$

$f'_u(1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right) = 5\frac{1}{4}$

b) $f(x,y) = \log_2(x^2+y) = \ln(x^2+y)\cdot\frac{1}{\ln 2}$ v $[2,4]$, $dx = -0{,}04$; $dy = 0{,}02$

$f'_x(x,y) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2x}{x^2+y}$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x^2+y}$

$df(2,4) = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}dx + \frac{1}{8}dy\right) = \frac{1}{\ln 2}(-0{,}02+0{,}0025) \approx -0{,}025$

$f(1{,}96; 4{,}02) \approx \log_2(2^2+4) + df(2,4) \approx 3 - 0{,}025 = \underline{2{,}975}$

c) $x+y^2+z^3+z-4=0$ v $[1,1,1]$, $z = z(x,y)$:

$1+3z^2\cdot z'_x + z'_x = 0$

$2y + 3z^2\cdot z'_y + z'_y = 0$ v $[1,1,1]$: $1+4z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{1}{4}$; $2+4z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = -\frac{1}{2}$

Tečná rovina: $z - z_0 = z'_x(x-x_0) + z'_y(y-y_0) \Rightarrow z-1 = -\frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1)$

$\underline{x+2y+4z=7}$

Druhé derivace:

$z''_{xx}(3z^2+1) + z'_x(6z\cdot z'_x) = 0$

$z''_{xy}(3z^2+1) + z'_x(6z\cdot z'_y) = 0$

$2 + z''_{yy}(3z^2+1) + z'_y(6z\cdot z'_y) = 0$

Odtud: $z''_{xx}(1,1) = -\frac{3}{32}$, $z''_{yy}(1,1) = -\frac{7}{8}$, $z''_{xy}(1,1) = -\frac{3}{16}$

$Hz(1,1) = \begin{pmatrix} -3/32 & -3/16 \\ -3/16 & -7/8 \end{pmatrix}$ $\det Hz(1,1) = \frac{21}{256} + \frac{9}{256} > 0$

Hessián je neg. def. $\Rightarrow$ graf leží pod tečnou rovinou.

Jméno: Skupina: D Místnost: 2. zkouška

0004 *příklad* 1 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Spojitá náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(1, 3)$. Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \frac{1}{X}$. (2)

(b) Na dvou soustruzích (s teoreticky stejnou variabilitou produkce) se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 9 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 13 z produkce druhého soustruhu. Příslušné výběrové průměry jsou 36,5 mm, resp. 36,0 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0{,}1$. Svůj závěr explicitně zformulujte. (4)

X rovnoměrné

a) $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\frac{1}{X} \le y) = P(X \ge \frac{1}{y}) = 1 - F_X(\frac{1}{y})$

$$f_Y(y) = \begin{cases} (1 - F_X(\frac{1}{y}))' = -f_X(\frac{1}{y}) \cdot (-\frac{1}{y^2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} & \frac{1}{3} \le y \le 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

b) $n_1 = 9$ $\quad M_1 = 36{,}5$ $\quad S_1^2 = 1{,}21$

$n_2 = 13$ $\quad M_2 = 36$ $\quad S_2^2 = 1{,}44$

$\alpha = 0{,}1$

hypotéza $\mu_1 - \mu_2 = 0$

90% oboustranný interval pro $\mu_1 - \mu_2$

$$S_*^2 = (8 \cdot 1{,}21 + 12 \cdot 1{,}44)/20 = 1{,}348$$

$$36{,}5 - 36 \pm \sqrt{1{,}348} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13}} \cdot 1{,}7247 = (-0{,}368; 1{,}368) \ni 0$$

hypotézu nezamítáme

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **2. zkouška**

0004 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Uvažujte rodiny se třemi dětmi (předpokládáme stejnou pravděpodobnost kterékoliv z osmi kombinací pohlaví – děti rozlišujeme dle věku). Určete pravděpodobnost jevů „rodina má aspoň dvě děvčata“ a „rodina má děvče i chlapce“; rozhodněte, zda jde o nezávislé jevy. (2)

(b) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 4$, $|b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné. (4)

a) A.. rodina má aspoň 2 děvčata

B.. rodina má děvče i chlapce

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{3}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

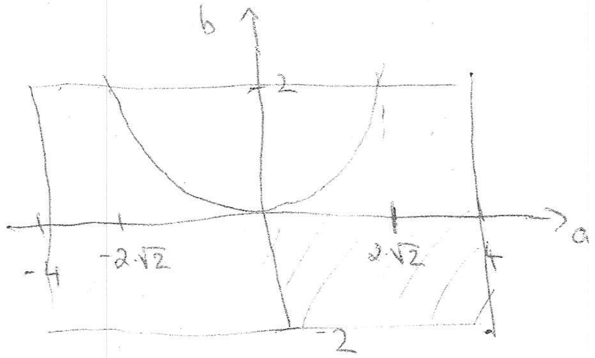
$\frac{3}{8} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow$ nezávislé jevy

b) $x^2 + ax + b$

$|a| \leq 4$

$|b| \leq 2$



reálné $a^2 - 4b \geq 0$

$b \leq \frac{a^2}{4}$

$S = 2 \cdot 4 \cdot (4 - 2\sqrt{2}) + \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{a^2}{4}\, da + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2$

$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{a^2}{4}\, da = \left[\frac{a^3}{12}\right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{\cancel{16} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{12}_3}{}^{4} + \frac{\cancel{16} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{12}_3}{}^{4} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{3}$

$= 2 \cdot 4 \cdot (4 - 2\sqrt{2}) + \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{3} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 24{,}458$

$S_0 = 8 \cdot 4 = 32$

$P = \frac{S}{S_0} = \underline{\underline{0{,}764}}$

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **2. zkouška**

0004 *příklad* 3 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce (8 bodů): **Příklad 3**

(a) Vypočtěte Hessovu matici funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $[e,2]$.
(b) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $\sin(x^2+y)$ se středem v bodě $[0,\frac{\pi}{4}]$.
(c) Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $z = z(x,y)$ zadané implicitně rovnicí $\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0$ v bodě $[2,\frac{4}{3},-1]$.

a) $f(x,y) = x^y$ v $[e,2]$
$= e^{y\cdot\ln x}$

$f'_x = x^y\cdot\frac{y}{x} = y\cdot x^{y-1}$
$f'_y = x^y\cdot\ln x$
$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$ $f''_{xx}(e,2) = 2\cdot1\cdot e^0$
$f''_{xy} = x^{y-1} + y\cdot x^{y-1}\cdot\ln x$; $f''_{xy}(e,2) = 3e$
$f''_{yy} = (\ln x)^2\cdot x^y$ $f''_{yy}(e,2) = e^2$

Dosadíme $[e,2]$:
$Hf(e,2) = \begin{pmatrix} 2 & 3e \\ 3e & e^2 \end{pmatrix}$

b) $f(x,y) = \sin(x^2+y)$ se středem v $[0,\frac{\pi}{4}]$:

$f'_x = \cos(x^2+y)\cdot 2x$
$f'_y = \cos(x^2+y)$
$f''_{xx} = -\sin(x^2+y)\cdot 2x\cdot 2x + \cos(x^2+y)\cdot 2$
$f''_{xy} = 2x\cdot(-\sin(x^2+y))$
$f''_{yy} = -\sin(x^2+y)$

$T_{f,2}(0,\frac{\pi}{4})(x,y) =$
$= f(0,\frac{\pi}{4}) + f'_x(0,\frac{\pi}{4})(x-0) + f'_y(0,\frac{\pi}{4})\cdot(y-\frac{\pi}{4}) +$
$+ \frac{1}{2!}\left((x, y-\frac{\pi}{4})\cdot Hf(0,\frac{\pi}{4})\cdot(x, y-\frac{\pi}{4})^T\right) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-\frac{\pi}{4}) +$
$+ \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(y-\frac{\pi}{4})^2 + 2\cdot 0\cdot x\cdot(y-\frac{\pi}{4})\right) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-\frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}(y-\frac{\pi}{4})^2$

c) $\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0$ v $[2,\frac{4}{3},-1]$.

$z = z(x,y)$; derivujeme podle x, resp. y:
$x + 4z\cdot z'_x = 0$: $2 - 4z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{1}{2}$
$-3 + 4z\cdot z'_y = 0$ $-3 - 4z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = -\frac{3}{4}$

Tečná rovina: $z - z_0 = z'_x(x-x_0) + z'_y(y-y_0)$
$z+1 = \frac{1}{2}(x-2) - \frac{3}{4}(y-\frac{4}{3})$
$0 = 2x - 3y - 4z - 4$

Normála: $n: [2,\frac{4}{3},-1] + t(2,-3,-4)$.

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **2. zkouška**

0004 *příklad* 3 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce (8 bodů): **Příklad 3**

(a) Vypočtěte Hessovu matici funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $[e, 2]$.

(b) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $\sin(x^2 + y)$ se středem v bodě $[0, \frac{\pi}{4}]$.

(c) Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $z = z(x,y)$ zadané implicitně rovnicí $\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0$ v bodě $[2, \frac{4}{3}, -1]$.

a) $f(x,y) = x^y$ v $[e,2]$
$= e^{y \cdot \ln x}$

$f'_x = x^y \cdot \frac{y}{x} = y \cdot x^{y-1}$

$f'_y = x^y \cdot \ln x$

$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$ $\quad f''_{xx}(e,2) = 2 \cdot 1 \cdot e^0$

$f''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x$; $\quad f''_{xy}(e,2) = 3e$

$f''_{yy} = (\ln x)^2 \cdot x^y$ $\quad f''_{yy}(e,2) = e^2$

Dosadíme $[e,2]$:

$$Hf(e,2) = \begin{pmatrix} 2 & 3e \\ 3e & e^2 \end{pmatrix}$$

b) $f(x,y) = \sin(x^2+y)$ se středem v $[0,\frac{\pi}{4}]$:

$f'_x = \cos(x^2+y) \cdot 2x$

$f'_y = \cos(x^2+y)$

$f''_{xx} = -\sin(x^2+y) \cdot 2x \cdot 2x + \cos(x^2+y) \cdot 2$

$f''_{xy} = 2x \cdot (-\sin(x^2+y))$

$f''_{yy} = -\sin(x^2+y)$

$T_{f,2}(0,\frac{\pi}{4})(x,y) =$
$= f(0,\frac{\pi}{4}) + f'_x(0,\frac{\pi}{4})(x-0) + f'_y(0,\frac{\pi}{4}) \cdot (y-\frac{\pi}{4}) +$
$+ \frac{1}{2!}\left((x, y-\frac{\pi}{4}) \cdot Hf(0,\frac{\pi}{4}) \cdot (x, y-\frac{\pi}{4})^T \right) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-\frac{\pi}{4}) +$
$+ \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(y-\frac{\pi}{4})^2 + 2 \cdot 0 \cdot x \cdot (y-\frac{\pi}{4})\right) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-\frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}(y-\frac{\pi}{4})^2$

c) $\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0$ v $[2,\frac{4}{3},-1]$.

$z = z(x,y)$; derivujeme podle x, resp. y:

$x + 4z \cdot z'_x = 0$: $\quad 2 - 4z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{1}{2}$

$-3 + 4z \cdot z'_y = 0 \quad -3 - 4z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = -\frac{3}{4}$

Tečná rovina: $z - z_0 = z'_x(x-x_0) + z'_y(y-y_0)$
$z+1 = \frac{1}{2}(x-2) - \frac{3}{4}(y-\frac{4}{3})$
$0 = 2x - 3y - 4z - 4$

Normála: $n: [2,\frac{4}{3},-1] + t(2,-3,-4)$.

Jméno: Skupina: D Místnost: 2. zkouška

0004 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Uvažujte rodiny se třemi dětmi (předpokládáme stejnou pravděpodobnost kterékoliv z osmi kombinací pohlaví – děti rozlišujeme dle věku). Určete pravděpodobnost jevů „rodina má aspoň dvě děvčata" a „rodina má děvče i chlapce"; rozhodněte, zda jde o nezávislé jevy. (2)

(b) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \le 4$, $|b| \le 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné. (4)

a) A.. rodina má aspoň 2 děvčata

B.. rodina má děvče i chlapce

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{3}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

$\frac{3}{8} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow$ nezávislé jevy

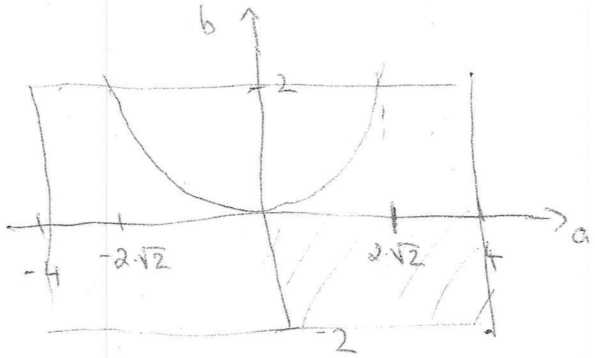
b) $x^2 + ax + b$

$|a| \le 4$

$|b| \le 2$

reálné $a^2 - 4b \ge 0$

$b \le \frac{a^2}{4}$



$S = 2 \cdot 4 \cdot (4 - 2\sqrt{2}) + \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{a^2}{4} \, da + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2$

$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{a^2}{4} \, da = \left[\frac{a^3}{12} \right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{\cancel{16}^{4} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{12}_{3}} + \frac{\cancel{16}^{4} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{12}_{3}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{3}$

$= 2 \cdot 4 \cdot (4 - 2\sqrt{2}) + \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{3} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 24{,}458$

$S_0 = 8 \cdot 4 = 32$

$P = \frac{S}{S_0} = \underline{\underline{0{,}764}}$

Jméno: Skupina: D Místnost: 2. zkouška

0004 *příklad* 1 *učo* *body*

0123456789

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Spojitá náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(1, 3)$. Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \frac{1}{X}$. (2)

(b) Na dvou soustruzích (s teoreticky stejnou variabilitou produkce) se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 9 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 13 z produkce druhého soustruhu. Příslušné výběrové průměry jsou 36,5 mm, resp. 36,0 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0{,}1$. Svůj závěr explicitně zformulujte. (4)

X nezáporná!

a) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left(1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)\right)' = -f_X\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2} & \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

b) $n_1 = 9$ $\quad M_1 = 36{,}5$ $\quad S_1^2 = 1{,}21$

$n_2 = 13$ $\quad M_2 = 36$ $\quad S_2^2 = 1{,}44$

$\alpha = 0{,}1$

hypotéza $\mu_1 - \mu_2 = 0$

90% oboustranný interval pro $\mu_1 - \mu_2$

$S_*^2 = (8 \cdot 1{,}21 + 12 \cdot 1{,}44)/20 = 1{,}348$

$36{,}5 - 36 \pm \sqrt{1{,}348} \cdot \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{13}} \cdot 1{,}7247 = (-0{,}368; 1{,}368) \ni 0$

hypotézu nezamítáme

Jméno: Skupina: C Místnost: 2. zkouška

0003 příklad 3 učo body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce (8 bodů): **Příklad 3**

(a) Určete směr, v němž funkce $\ln(x+y^2)+z^2$ v bodě $[1,1,1]$ nejrychleji roste a určete derivaci v tomto směru.

(b) Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu výrazu $\log_2(1{,}96^2+4{,}02)$.

(c) Rozhodněte, zda graf funkce $z=z(x,y)$ zadané implicitně rovnicí $x+y^2+z^3+z-4=0$ leží v bodě $[1,1,1]$ nad nebo pod svojí tečnou rovinou. Rovnici tečné roviny zapište.

a) $f(x,y,z)=\ln(x+y^2)+z^2$. Nejrychleji roste ve směru gradientu

$$(f'_x, f'_y, f'_z) = \left(\frac{1}{x+y^2}, \frac{2y}{x+y^2}, 2z\right) = \left(\tfrac{1}{2}, 1, 2\right) =: u$$

$$f'_u(1,1,1) = \left(\tfrac{1}{2},1,2\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2},1,2\right) = 5\tfrac{1}{4}$$

b) $f(x,y)=\log_2(x^2+y)$ v $[2,4]$, $dx=-0{,}04$; $dy=0{,}02$

$$= \ln(x^2+y)\cdot\frac{1}{\ln 2}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2x}{x^2+y}$$

$$df(2,4) = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}dx + \frac{1}{8}dy\right)$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x^2+y}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}(-0{,}02+0{,}0025) \approx -0{,}025$$

$$f(1{,}96;4{,}02) \approx \log_2(2^2+4) + df(2,4) \approx 3-0{,}025 = \underline{2{,}975}$$

c) $x+y^2+z^3+z-4=0$ v $[1,1,1]$, $z=z(x,y)$:

$$1+3z^2\cdot z'_x + z'_x = 0 \qquad 1+4z'_x=0 \Rightarrow z'_x = -\frac{1}{4}$$

$$2y+3z^2\cdot z'_y + z'_y = 0 \quad \text{v } [1,1,1]: \quad 2+4z'_y=0 \Rightarrow z'_y = -\frac{1}{2}$$

Tečná rovina: $z-z_0 = z'_x(x-x_0)+z'_y(y-y_0) \Rightarrow z-1 = -\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)$

$$\underline{x+2y+4z=7}$$

Druhé derivace:

$$z''_{xx}(3z^2+1) + z'_x(6z\cdot z'_x) = 0 \qquad \text{odtud: } z''_{xx}(1,1) = -\frac{3}{32} \qquad z''_{yy}(1,1) = -\frac{7}{8}$$

$$z''_{xy}(3z^2+1) + z'_x(6z\cdot z'_y) = 0 \qquad z''_{xy}(1,1) = -\frac{3}{16}$$

$$2+z''_{yy}(3z^2+1)+z'_y(6z\cdot z'_y)=0 \qquad Hz(1,1) = \begin{pmatrix} -3/32 & -3/16 \\ -3/16 & -7/8 \end{pmatrix} \qquad \det Hz(1,1) = \frac{21}{256} - \frac{9}{256} > 0$$

Hessián je neg. def. $\Rightarrow$ graf leží pod tečnou rovinou.

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **2. zkouška**

0003 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Uvažujte rodiny se třemi dětmi (předpokládáme stejnou pravděpodobnost kterékoliv z osmi kombinací pohlaví – děti rozlišujeme dle věku). Určete pravděpodobnost jevů „rodina má nejvýše jedno děvče“ a „rodina má děvče i chlapce“; rozhodněte, zda jde o nezávislé jevy. (2)

(b) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné a záporné. (4)

a) A.. rodina má nejvýše jedno děvče

B.. rodina má děvče i chlapce.

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

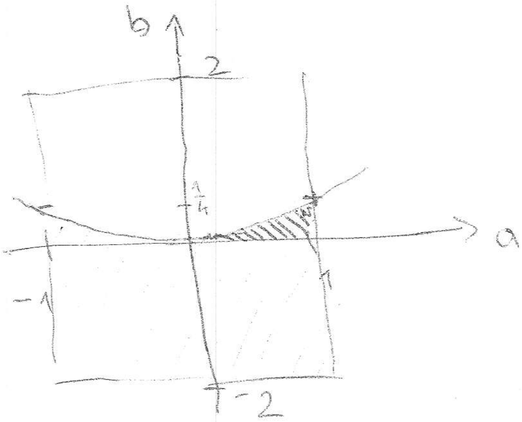
$P(B) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow$ jsou to nezávislé jevy

b) x^2+ax+b $|a| \leq 1, |b| \leq 2$



reálné: $a^2 - 4b \geq 0$

$a^2 \geq 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$

záporné: $a = -(x_1+x_2) > 0$

$b = x_1 \cdot x_2 > 0$

$S = \int_0^1 \frac{a^2}{4}\, da = \left[\frac{a^3}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

$S_0 = 2 \cdot 4 = 8$

$P = \frac{S}{S_0} = \frac{\frac{1}{12}}{8} = \frac{1}{96}$

Oblast strojově snímatelných informací, nezasahujte. ***Řešení pište jen na tuto stranu.***

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **2. zkouška**

0003 *příklad* *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Spojitá náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 3)$. Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$. (2)

(b) Na dvou soustruzích (s teoreticky stejnou variabilitou produkce) se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 14 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 18 z produkce druhého soustruhu. Příslušné výběrové průměry jsou 36,5 mm, resp. 36,0 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0{,}05$. Svůj závěr explicitně zformulujte. (4)

a) $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$f_Y(y) = (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))' = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} =$

$= \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} & y \in (0,9) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

b) $n_1 = 14$ $M_1 = 36{,}5$ $S_1^2 = 1{,}21$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$n_2 = 18$ $M_2 = 36{,}0$ $S_2^2 = 1{,}44$

$\alpha = 0{,}05$

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ .. hypotéza

95% oboustranný interval pro $\mu_1 - \mu_2$

$S_*^2 = (13 \cdot 1{,}21 + 17 \cdot 1{,}44)/30 = 1{,}34$

$36{,}5 - 36{,}0 \pm \sqrt{1{,}34} \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{18}} \cdot 2{,}0423 = (-0{,}342; 1{,}342) \ni 0$

$\Rightarrow$ hypotézu nezamítáme

Jméno: Skupina: B Místnost: 2. zkouška

0002 příklad 3 učo body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce (8 bodů): **Příklad 3**

(a) Dokažte, že funkce $f(x,y) = \frac{-y}{x^2-y}$ nemá limitu v bodě $(0,0)$.

(b) Rozhodněte, zda graf funkce $y = y(x)$ zadané implicitně rovnicí $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ leží v bodě $[1,3]$ nad nebo pod svojí tečnou v tomto bodě. Rovnici tečny zapište.

(c) Pomocí Taylorova polynomu stupně 2 se středem v bodě $[1,1]$ odhadněte (a s pomocí kalkulačky vyčíslete) hodnotu funkce $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ pro $[x,y] = [1{,}1; 1{,}2]$.

a) $f(x,y) = \frac{-y}{x^2-y}$. Jmenovatel „nabízí" limitu přechod „po parabole"

$y = kx^2$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{-kx^2}{x^2-kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-k}{1-k} = \frac{-k}{1-k}$

Závisí na k, proto lim. neexistuje.

b) $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ v $[1,3]$.

Derivujeme podle x: $9x - 3y^2 - 6xy\cdot y' + 3y^2\cdot y' = 0$

$9x - 3y^2 - y'(3y^2 - 6xy) = 0$

v $[1,3]$: $9 - 27 - 18y' + 27y' = 0$

$\underline{y' = 2}$

Znovu derivujeme: $9 - 6y\cdot y' + y''(3y^2 - 6xy) + y'(6y\cdot y' - 6y - 6xy') = 0$

v $[1,3]$: $9 - 18y' + y''(27-18) + y'(12y' - 18) = 0$

$\underline{y'' = \frac{15}{9}}$

$y''(1) = \frac{15}{9} > 0 \Rightarrow$ graf leží nad tečnou.

Rovnice tečny: $y - y_0 = y'(1)(x - x_0)$

$y - 3 = 2(x-1)$

$\underline{\underline{y = 2x + 1}}$

c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ v $[1,1]$.

$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$ $f'_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$

$f''_{xx}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2}$ $f''_{xy}(x,y) = \frac{-2x\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}$ $f''_{yy}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2+1) - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}$

$T_{f,2,(1,1)}(x,y) = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) + \frac{1}{2!}\left((x-1, y-1)(Hf(1,1))\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}\right) =$

$= \ln 3 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{2}{9}(y-1)^2 + 2\left(-\frac{4}{9}\right)(x-1)(y-1)\right)$

$f(1{,}1; 1{,}2) \approx T_{f,2;(1,1)}(1{,}1;1{,}2) = \ln 3 + \frac{2}{3}(0{,}1) + \frac{2}{3}(0{,}2) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\cdot 0{,}1^2 + \frac{2}{9}\cdot 0{,}2^2 - \frac{8}{9}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2\right) = \underline{\underline{1{,}283}}$

Jméno: Skupina: B Místnost: 2. zkouška

0002 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Hodíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost jevů: „padne součet devět“, resp. „padne alespoň jedna pětka“, a rozhodněte, zda jde o stochasticky nezávislé jevy. (2)

(b) V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete rozdělení vzdálenosti dítěte od nejdelší strany lesa. (4)

a) A ... padne součet 9

B ... padne alespoň jedna pětka

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

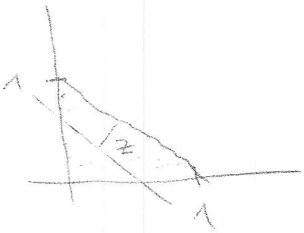
$P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{9}\cdot\frac{11}{36} \neq \frac{1}{18} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ nejedná se o jevy stoch. nez.

b)



$v = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$F(z) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} - z}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 = 2\cdot\left(\sqrt{2}z - z^2\right) & 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & z < 0 \\ 1 & z > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Jméno: Skupina: B Místnost: 2. zkouška

0002 *příklad* 1 *učo* *body*

0123456789

Náhodné veličiny (6 bodů): **Příklad 1**

(a) Rozhodněte, zda je směrodatná odchylka součtu libovolné dvojice nezávislých náhodných veličin X, Y rovna součtu směrodatných odchylek těchto veličin. Vše zdůvodněte (buď dokažte nebo uveďte protipříklad). (2)

(b) Odběratel provádí kontrolu jakosti namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,2 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10\,\mathrm{mm}; 0,0737\,\mathrm{mm}^2)$. Určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky? (V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte). (4)

a) pro dvojici nezávislých náhodných veličin platí

$$D(X)+D(Y)=D(X+Y) \Rightarrow \sqrt{D(X+Y)} = \sqrt{(D(X)+D(Y))}$$

pro X, Y např. normální standardizované to neplatí

$$\sqrt{2} \neq 2\cdot\sqrt{1}$$

b) $n = 21$

$$P(S \leq 0{,}2) = P(S^2 \leq 0{,}04) = P\left(\frac{20S^2}{\sigma^2} \leq \frac{20\,0{,}04}{0{,}0737}\right) =$$

$$= P\left(\frac{20S^2}{\sigma^2} \leq 10{,}85\right) = \underline{0{,}05}$$

$$P(S \leq 0{,}2) = P(S^2 \leq 0{,}04) = P\left(\frac{3S^2}{\sigma^2} \leq \frac{3\cdot 0{,}04}{0{,}0737}\right) = P\left(\frac{3S^2}{\sigma^2} \leq 1{,}628\right)$$

F distribuční fce $\chi^2(3)$

$F(0{,}548) = 0{,}1$

$F(2{,}37) = 0{,}5$

$F(1{,}628) = 0{,}337$

Jméno: Skupina: A Místnost: 2. zkouška

0001 příklad 3 učo body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce (8 bodů): **Příklad 3**

(a) Vypočtěte derivaci funkce $f(x, y, z) = x^2y + z^4$ v bodě $[1, 1, 1]$ ve směru vektoru $(1, 3, -1)$ i) z definice; ii) pomocí gradientu (diferenciálu).

(b) Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$ v bodě $[2\sqrt{3}, 2, 4, ?]$.

(c) Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[1, 1]$ implicitně rovnicí $y^3 + xy - 2x^2 = 0$. Určete Taylorův polynom 2. stupně této funkce v bodě $x_0 = 1$.

a) i) $\lim_{t\to 0} \frac{f([1,1,1]+t(1,3,-1)) - f(1,1,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^2(1+3t)+(1-t)^4-2}{t} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{t^4-t^3+13t^2+t}{t} = \lim_{t\to 0} (t^3-t^2+13t+1) = \underline{1}$

ii) $f'_x(x,y,z) = 2xy$, $f'_y(x,y,z) = x^2$, $f'_z(x,y,z) = 4z^3 \Rightarrow df(1,1,1) = (2,1,4)$

$f'_{(1,3,-1)}(1,1,1) = (2,1,4)\cdot(1,3,-1) = 2+3-4 = \underline{1}$

b) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$ v $A = [2\sqrt{3}, 2, 4, \frac{\pi}{3}]$.

$f'_x(x,y,z) = \frac{yz}{x^2y^2+z^2}$, $f'_y(x,y,z) = \frac{xz}{x^2y^2+z^2}$, $f'_z(x,y,z) = \frac{z^2}{x^2y^2+z^2}\left(-\frac{xy}{z^2}\right) = -\frac{xy}{x^2y^2+z^2}$

$f'_x(A) = \frac{1}{8}$, $f'_y(A) = \frac{\sqrt{3}}{8}$, $f'_z(A) = -\frac{\sqrt{3}}{16}$.

Rovnice tečné nadroviny: $u - u_0 = f'_x(A)(x-x_0) + f'_y(A)(y-y_0) + f'_z(A)(z-z_0)$

$u - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{16}\left[2(x-2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}(y-2) - \sqrt{3}(z-4)\right]$

c) $y^3 + xy - 2x^2$ v $[1,1]$ $y = y(x)$.

Derivujeme podle x: $3y^2 \cdot y' + y + xy' - 4x = 0$

$y'(3y^2+x) + y - 4x = 0$

v $[1,1]$: $3y' + 1 + y' - 4 = 0$

$y' = \frac{3}{4}$

Derivujeme: $y''(3y^2+x) + y'(6y\cdot y' + 1) + y' - 4 = 0$

$4y'' + \frac{3}{4}(6\cdot\frac{3}{4}+1) + \frac{3}{4} - 4 = 0$

$y'' = -\frac{7}{32}$

$T_{y,2}(1)(x) = 1 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{7}{32}\right)(x-1)^2$

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **2. zkouška**

0001 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Hodíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost jevů: „padne součet deset“, resp. „padne alespoň jedna pětka“, a rozhodněte, zda jde o stochasticky nezávislé jevy. (2)

(b) V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa. (4)

a) A padne součet 10

B padne alespoň jedna pětka

$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

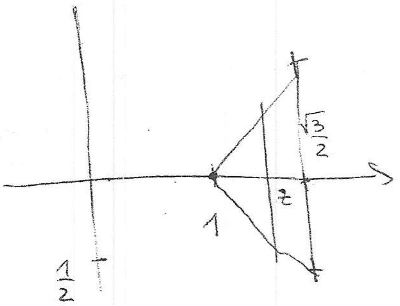
$P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{12} \cdot \frac{25}{36} \neq \frac{1}{36} = P(A \cap B)$

jedná se o stochasticky závislé jevy

b)



$$F(z) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - z}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{3} - 2 - 2z}{\sqrt{3} - 2}\right)^2 & z \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & z \leq 0 \\ 1 & z \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$$

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **2. zkouška**

0001

příklad *učo* *body*

0123456789

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Rozhodněte, zda je rozptyl součtu libovolné dvojice náhodných veličin X, Y roven součtu rozptylů těchto veličin. Vše zdůvodněte (buď dokažte nebo uveďte protipříklad). (2)

(b) Odběratel provádí kontrolu jakosti výrobků namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,1 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10\,\mathrm{mm}; 0,0208\,\mathrm{mm}^2)$. Určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky? (V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte). (4)

a) neplatí u ~~...~~ závislých náh. veličin.

$X = Y$ = alternativní rozdělení $\quad p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0,1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$D(X) = \theta(1-\theta) = \frac{1}{4}$

$D(X+X) = D(2X) \doteq 4D(X) \doteq 1$

$D(X+X) = 1 \neq \frac{1}{2} = D(X) + D(X)$

b) $P(S \leq 0,1) = P(S^2 \leq 0,01) = P\left(\frac{20 \cdot S^2}{\sigma^2} \leq \frac{20 \cdot 0,01}{0,0208}\right) = P\left(\frac{20S^2}{\sigma^2} \leq 9,615\right) \doteq 0,025$

$P(S \leq 0,1) = P(S^2 \leq 0,01) = P\left(\frac{3S^2}{\sigma^2} \leq \frac{3 \cdot 0,01}{0,0208}\right) = P\left(\frac{3S^2}{\sigma^2} \leq 1,442\right) = \underline{0,292}$

$F(0,584) = 0,1$

$F(2,37) = 0,5$

$F(1,442) = 0,292$