Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **2. zkouška**

příklad *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Rozhodněte, zda je rozptyl součtu libovolné dvojice náhodných veličin X, Y roven součtu rozptylů těchto veličin. Vše zdůvodněte (buď dokažte nebo uveďte protipříklad). (2)

(b) Odběratel provádí kontrolu jakosti výrobků namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,1 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10\,\mathrm{mm}; 0,0208\,\mathrm{mm}^2)$. Určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky? (V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte). (4)

Oblast strojově snímatelných informací, nezasahujte. ***Řešení pište jen na tuto stranu.***

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **2. zkouška**

0001 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Hodíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost jevů: „padne součet deset“, resp. „padne alespoň jedna pětka“, a rozhodněte, zda jde o stochasticky nezávislé jevy. (2)

(b) V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa. (4)

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **2. zkouška**

0001 *příklad* 3 *učo* *body*

0123456789

Funkce (8 bodů):

Příklad 3

(a) Vypočtěte derivaci funkce $f(x,y,z) = x^2y + z^4$ v bodě $[1,1,1]$ ve směru vektoru $(1,3,-1)$ i) z definice; ii) pomocí gradientu (diferenciálu).

(b) Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$ v bodě $[2\sqrt{3},2,4,?]$.

(c) Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[1,1]$ implicitně rovnicí $y^3 + xy - 2x^2 = 0$. Určete Taylorův polynom 2. stupně této funkce v bodě $x_0 = 1$.

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **2. zkouška**

0002 ***příklad*** 1 ***učo*** ***body***

0123456789

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Rozhodněte, zda je směrodatná odchylka součtu libovolné dvojice nezávislých náhodných veličin X, Y rovna součtu směrodatných odchylek těchto veličin. Vše zdůvodněte (buď dokažte nebo uveďte protipříklad). (2)

(b) Odběratel provádí kontrolu jakosti namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,2 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10\,\mathrm{mm}; 0,0737\,\mathrm{mm}^2)$. Určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky? (V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte). (4)

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **2. zkouška**

0002 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Hodíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost jevů: „padne součet devět“, resp. „padne alespoň jedna pětka“, a rozhodněte, zda jde o stochasticky nezávislé jevy. (2)

(b) V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete rozdělení vzdálenosti dítěte od nejdelší strany lesa. (4)

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **2. zkouška**

0002 *příklad* 3 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce (8 bodů):

Příklad 3

(a) Dokažte, že funkce $f(x,y) = \frac{-y}{x^2-y}$ nemá limitu v bodě $(0,0)$.

(b) Rozhodněte, zda graf funkce $y = y(x)$ zadané implicitně rovnicí $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ leží v bodě $[1,3]$ nad nebo pod svojí tečnou v tomto bodě. Rovnici tečny zapište.

(c) Pomocí Taylorova polynomu stupně 2 se středem v bodě $[1,1]$ odhadněte (a s pomocí kalkulačky vyčíslete) hodnotu funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ pro $[x,y] = [1{,}1; 1{,}2]$.

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **2. zkouška**

0003 *příklad* 1 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Spojitá náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 3)$. Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$. (2)

(b) Na dvou soustruzích (s teoreticky stejnou variabilitou produkce) se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 14 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 18 z produkce druhého soustruhu. Příslušné výběrové průměry jsou 36,5 mm, resp. 36,0 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0{,}05$. Svůj závěr explicitně zformulujte. (4)

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **2. zkouška**

0003 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Uvažujte rodiny se třemi dětmi (předpokládáme stejnou pravděpodobnost kterékoliv z osmi kombinací pohlaví – děti rozlišujeme dle věku). Určete pravděpodobnost jevů „rodina má nejvýše jedno děvče“ a „rodina má děvče i chlapce“; rozhodněte, zda jde o nezávislé jevy. (2)

(b) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné a záporné. (4)

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **2. zkouška**

0003 *příklad* 3 *učo* *body*

0123456789

Funkce (8 bodů):

Příklad 3

(a) Určete směr, v němž funkce $\ln(x+y^2)+z^2$ v bodě $[1,1,1]$ nejrychleji roste a určete derivaci v tomto směru.

(b) Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu výrazu $\log_2(1{,}96^2+4{,}02)$.

(c) Rozhodněte, zda graf funkce $z=z(x,y)$ zadané implicitně rovnicí $x+y^2+z^3+z-4=0$ leží v bodě $[1,1,1]$ nad nebo pod svojí tečnou rovinou. Rovnici tečné roviny zapište.

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **2. zkouška**

0004 *příklad* 1 *učo* *body*

0123456789

Náhodné veličiny (6 bodů):

Příklad 1

(a) Spojitá náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(1, 3)$. Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \frac{1}{X}$. (2)

(b) Na dvou soustruzích (s teoreticky stejnou variabilitou produkce) se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 9 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 13 z produkce druhého soustruhu. Příslušné vyběrové průměry jsou 36,5 mm, resp. 36,0 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0{,}1$. Svůj závěr explicitně zformulujte. (4)

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **2. zkouška**

0004 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Pravděpodobnost (6 bodů):

Příklad 2

(a) Uvažujte rodiny se třemi dětmi (předpokládáme stejnou pravděpodobnost kterékoliv z osmi kombinací pohlaví – děti rozlišujeme dle věku). Určete pravděpodobnost jevů „rodina má aspoň dvě děvčata“ a „rodina má děvče i chlapce“; rozhodněte, zda jde o nezávislé jevy. (2)

(b) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 4, |b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné. (4)

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **2. zkouška**

0004 *příklad* 3 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce (8 bodů):

Příklad 3

(a) Vypočtěte Hessovu matici funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $[e,2]$.

(b) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $\sin(x^2+y)$ se středem v bodě $[0,\frac{\pi}{4}]$.

(c) Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $z = z(x,y)$ zadané implicitně rovnicí $\frac{x^2}{2} - 3y + 2z^2 = 0$ v bodě $[2,\frac{4}{3},-1]$.