(A) M8103 pís-823 podzim 2014

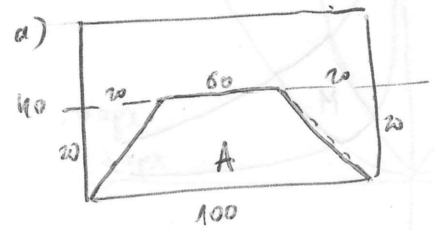
1. Testujeme $\mu_1 - \mu_2$ za předpokladu neznalých $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Vypočteme $M_1 = 5{,}58\overline{3}$; $M_2 = 4{,}01\overline{6}$; $S_1^2 = 4{,}3094$, $S_2^2 = 3{,}30\overline{16}$, $S_*^2 = 3{,}805\overline{6}$

konstruujeme jednostranný interval spolehlivosti 0,95 pro $\mu_1 - \mu_2$:

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left(M_1 - M_2 - S_* \sqrt{\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}} \cdot t_{0,95}(10); \infty\right) = \left(1{,}57 - 1{,}95 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3} \cdot 1{,}8125}; \infty\right) =$$
$$= (-0{,}4447; \infty).$$ Protože $0 \in$ intervalu, hypotézu nezamítáme, tj. nelze tvrdit, že první lék byl snazší

2. a)



$$P(A) = \frac{S_{\text{lichoběžník}}}{S_{\text{obdélník}}} = \frac{\frac{100+60}{2} \cdot 20}{4000} = \frac{2}{5}$$

b) Počet možných vytažení č červených, b bílých a 6-č-b modrých kuliček (kde $č \le 3$, $b \le 4$, $č+b \ge 1$) je $\binom{3}{č} \cdot \binom{4}{b} \cdot \binom{5}{6-č-b}$. Pravděpodobnostní funkce rozdělení (X, Y) je

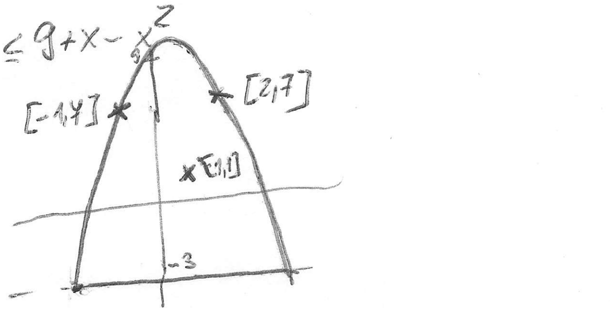
$$P(X = č, Y = b) = \frac{\binom{3}{č}\binom{4}{b}\binom{5}{6-č-b}}{\binom{12}{6} = \sum\limits_{\substack{č, b \\ č \le 3, b \le 4 \\ č+b \ge 1}} \binom{3}{č}\binom{4}{b}\binom{5}{6-č-b}}$$, viz tabulka.

Marginální rozdělení je určeno součty řádků, resp. sloupců (děleno 924)

X \ Y	0	1	2	3	4		
0	0	4	30	40	10	84	$P(X=0)$
1	3	60	180	120	15	378	$P(X=1)$
2	15	120	180	60	3	378	$P(X=2)$
3	10	40	30	4	0	84	$P(X=3)$
	28	224	420	224	28	924	

$$P(X \le 2) = \frac{924 - 84}{924} = \frac{840}{924} \doteq 0{,}909, \quad P(2 \le Y \le 3) = \frac{420 + 224}{924} = \frac{644}{924} \doteq 0{,}697$$

3. a) $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy + y$ na $M: -3 \le y \le 9 + x - x^2$



$f'_x = x^2 - y = 0$ $\quad \underline{y = 1}$

$f'_y = -x + 1 = 0$ $\quad \underline{x = 1}$

Hranice: $\underline{y = -3}$: $f_1(x) = f(x, -3) = \frac{x^3}{3} + 3x - 3$

$0 = f_1'(x) = x^2 + 3$ ... není stac. bod.

$-3 < \underline{y = 9 + x - x^2}$: $f_2(x) = f(x, 9 + x - x^2) = \frac{x^3}{3} + x^3 - 2x^2 - 8x + 9$

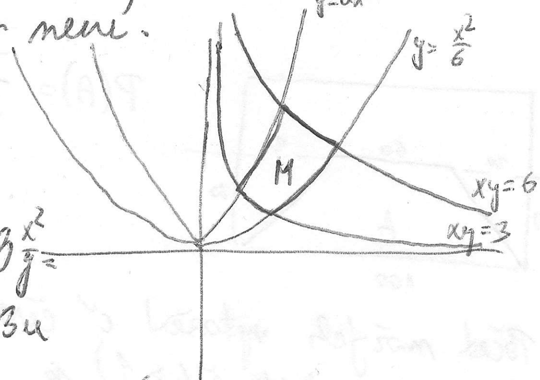
$0 = f_2'(x) = 4x^2 - 4x - 8 = 4(x+1)(x-2)$, stac. body $[-1, 7]$, $[2, 7]$

Dále vrcholy: $-3 = y = 9 + x - x^2 \iff x = -3 \vee x = 4$, body $[-3, -3]$, $[4, -3]$,

x	y	f(x,y)
1	1	1/3
-1	4	$13\frac{2}{3}$
2	4	$-4\frac{1}{3}$
-3	-3	-21
4	-3	$30\frac{1}{3}$

Globální maximum je $30\frac{1}{3}$ v bodě $[4,-3]$, minimum -21 v bodě $[-3,-3]$.

Lokální extrém může být pouze ve stacionárním bodě $[1,1]$, vyšetříme Hessián: $f''_{xx} = 2x$, $f''_{xy} = -1$, $f''_{yy} = 0 \Rightarrow Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ indefinitní matice (det<0), proto v $[1,1]$ lokální extrém není.



b) $u = \frac{x^2}{y}$ $\quad u'_x = \frac{2x}{y}$ $\quad u'_y = -\frac{x^2}{y^2}$

$v = xy$ $\quad v'_x = y$ $\quad v'_y = x$

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = 3\frac{x^2}{y} = 3u$$

Odtud $dx\,dy = \frac{1}{3u}\,du\,dv$.

$$S(M) = \iint_M dx\,dy = \int_3^6 \int_{1/2}^6 \frac{1}{3u}\,du\,dv = \frac{1}{3}\int_3^6 \left[\ln u\right]_{1/2}^6 dv = \ln 6 - \ln\frac{1}{2} = \underline{2\ln 2 + \ln 3.}$$

M8103 pis-823 podzim 2014

(B) Testujeme $\mu_1-\mu_2$ za předpokladu neznámých $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

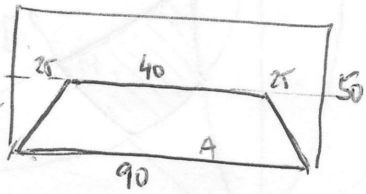
Vypočteme $M_1 = 6{,}1\overline{83}$; $M_2 = 4{,}\overline{6}$; $S_1^2 = 4{,}3096$, $S_2^2 = 3{,}4\overline{6}$; $S_*^2 = 3{,}\overline{8}$

Konstruujeme jednostranný interval spolehlivosti 0,95 pro $\mu_1-\mu_2$:

$$\mu_1-\mu_2 \in \left(M_1-M_2 - S_* \sqrt{\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}}\cdot t_{0,95}(10);\ \infty\right) = \left(1{,}91\overline{6} - 1{,}942\cdot\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cdot 1{,}8125;\ \infty\right)$$
$$\doteq (-0{,}1464;\ \infty).$$

Protože 0 patří do intervalu, hypotézu nezamítáme, tj. nelze tvrdit, že první dávka byla snazší.

2\. a)



$$P(A) = \frac{S_{\text{trap}}}{S_{\text{rect}}} = \frac{\frac{90+40}{2}\cdot 25}{90\cdot 50} = \frac{130}{90\cdot 4} = \frac{13}{36}.$$

b) Počet možných vytažení č černých, b bílých a 5−č−b modrých kuliček (kde $č\le 4$, $b\le 3$, $č+b\ge 1$) je $\binom{4}{č}\cdot\binom{3}{b}\cdot\binom{4}{5-č-b}$. Pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X,Y) je $P(X=č, Y=b) = \dfrac{\binom{4}{č}\binom{3}{b}\binom{4}{5-č-b}}{\dots}$, viz tabulka

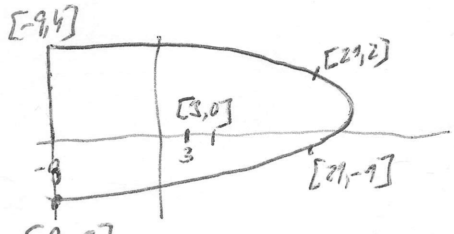
$$\binom{11}{5} = \sum_{\substack{č,b\\ č\le 4,\, b\le 3\\ č+b\ge 1}} \binom{4}{č}\binom{3}{b}\binom{4}{5-č-b}$$

X \ Y	0	1	2	3	P(X=č)
0	0	3	12	6	21
1	4	48	72	16	140
2	24	108	72	6	210
3	24	48	12	0	84
4	4	3	0	0	7
P(Y=b)	56	210	168	28	462

$$P(1\le X\le 4) = \frac{469-21}{462} = \frac{448}{462} \doteq 0{,}97$$

$$P(Y\le 1) = \frac{56+210}{462} = \frac{266}{462} \doteq 0{,}58$$

3\. a) $g(x,y) = (y-1)^3 - xy$ na $M: -9 \le x \le 27+3y-3y^2$



$g'_x = -y = 0$ $\quad$ $y=0$

$g'_y = 3(y-1)^2 - x = 0$ $\quad$ $x=3$ $\quad$ $[3,0]$

Hranice: $x=-9$: $g_1(y) = g(-9,y) = (y-1)^3 + 9y$
$g_1' = 3(y-1)^2+9 \dots$ není stac. bod

$-9 < x = 27+3y-3y^2$: $g_2(y) = g(27+3y-3y^2, y) = 4y^3 - 6y^2 - 24y - 1$
$g_2' = 12y^2 - 12y - 24 = 12(y-2)(y+1)$, stac. body $[21,2]$, $[21,-1]$

Vrcholy: $-9 = x = 27+3y-3y^2 \iff 3y^2-3y-36 = 0 \iff (y-4)(y+3) = 0$. $[-9,-3]$, $[-9,4]$

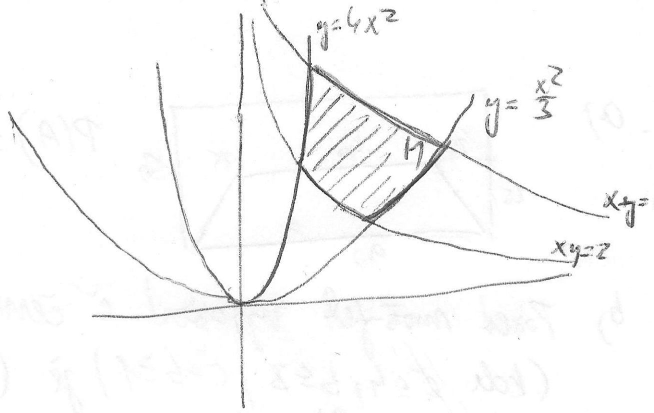
Porovnáme funkční hodnoty:

x	y	$g(x,y)$
3	0	-1
21	2	-41
21	-1	13
-9	-3	-91
-9	4	63

Globální maximum je 63 v bodě $[-9,4]$, minimum -21 v bodě $[-9,-3]$.

Lokální extrém může nastat pouze ve stacionárním bodě $[3,0]$, vyšetříme Hessián: $g''_{xx}=0$, $g''_{xy}=-1$, $g''_{yy}=6(y-1)$ $\Rightarrow$

$Hg(3,0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -6\end{pmatrix}$, což je indefinitní matice ($\det<0$), proto v $[3,0]$ lokální extrém není.



b) $u=\frac{x^2}{y}$ $\quad u'_x=\frac{2x}{y}$ $\quad u'_y=-\frac{x^2}{y^2}$

$v=xy$ $\quad v'_x=y$ $\quad v'_y=x$

$$\begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}=\frac{3x^2}{y}=3u$$

Odtud $dx\,dy=\frac{1}{3u}\,du\,dv$

$$S(M)=\iint_M dx\,dy=\int_2^5\int_{1/4}^3\frac{1}{3u}\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_2^5\left[\ln u\right]_{1/4}^3 dv=\ln 3-\ln\frac{1}{4}=$$
$$=\underline{\ln 3+2\ln 2}$$