A1. Pomocí transformace do polárních souřadnic spočtěte

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M\colon (x-1)^2+y^2 \geq 1$, $(x-2)^2+y^2 \leq 4$.

Řešení. Transformace je dána

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Pro oblast M platí

$$\begin{aligned} (r\cos\varphi-1)^2+(r\sin\varphi)^2 &\geq 1, & \qquad (r\cos\varphi-2)^2+(r\sin\varphi)^2 &\leq 4,\\ r^2-2r\cos\varphi &\geq 0, & r^2-4r\cos\varphi &\leq 0, \end{aligned}$$

tedy $2\cos\varphi \leq r \leq 4\cos\varphi$. To je možné pouze pro $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ a tedy

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \frac{1}{r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [r]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &= [2\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4. \end{aligned}$$

□

A2. Najděte obecné řešení rovnice
$$xy' = 2y - x.$$

Řešení. Příslušná homogenní lineární rovnice je
$$xy' = 2y.$$

Separací proměnných dostáváme
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 2\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ \ln|y| &= 2\ln|x| + c\\ y &= cx^2.\end{aligned}$$

Metoda variace konstant dá řešení tvaru $y = c(x)x^2$, kde $c(x)$ je řešením
$$\begin{aligned}x(c(x)x^2)' &= 2c(x)x^2 - x\\ xc'(x)x^2 + xc(x)2x &= 2c(x)x^2 - x\\ c'(x)x^3 &= -x\\ c'(x) &= -\frac{1}{x^2}\\ c(x) &= \frac{1}{x} + c\end{aligned}$$

a tedy $y = (\frac{1}{x} + c)x^2 = x + cx^2$. □

A3. V písemce se objevil náročný příklad. Ze studentů si $1/3$ zapomněla kalkulačku a zcela nezávisle si $1/3$ studentů zapomněla tahák. Studenti vybavení oběma pomůckami vypočítali příklad s pravděpodobností 70%, studenti vybaveni pouze kalkulačkou s pravděpodobností 50%, studenti vybavení pouze tahákem s pravděpodobností 30% a studenti bez jakékoliv pomůcky pak s pravděpodobností 10%. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený student příklad vypočítal? Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané správné řešení pochází od studenta bez kalkulačky?

Řešení. Díky nezávislosti platí

$$
\begin{aligned}
P(K\cap T) &= 2/3\cdot 2/3 = 4/9, & P(K\cap\neg T) &= 2/3\cdot 1/3 = 2/9,\\
P(\neg K\cap T) &= 1/3\cdot 2/3 = 2/9, & P(\neg K\cap\neg T) &= 1/3\cdot 1/3 = 1/9.
\end{aligned}
$$

Potom pravděpodobnost úspěchu je

$$
\begin{aligned}
P(U) &= P(U\mid K\cap T)P(K\cap T) + P(U\mid K\cap\neg T)P(K\cap\neg T)\\
&\quad + P(U\mid\neg K\cap T)P(\neg K\cap T) + P(U\mid\neg K\cap\neg T)P(\neg K\cap\neg T)\\
&= 7/10\cdot 4/9 + 5/10\cdot 2/9 + 3/10\cdot 2/9 + 1/10\cdot 1/9 = 1/2 = 50\%.
\end{aligned}
$$

Podmíněná pravděpodobnost ze zadání je

$$
\begin{aligned}
P((\neg K\cap T)\cup(\neg K\cap\neg T)\mid U) &= \frac{P(\neg K\cap T\cap U) + P(\neg K\cap\neg T\cap U)}{P(U)}\\
&= \frac{P(U\mid\neg K\cap T)P(\neg K\cap T) + P(U\mid\neg K\cap\neg T)P(\neg K\cap\neg T)}{P(U)}\\
&= \frac{3/10\cdot 2/9 + 1/10\cdot 1/9}{1/2} = 7/45 = 15{,}56\%.
\end{aligned}
$$

□

A4. Spojitá náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti $f(x) = c \cdot e^{-x}$ pro všechna kladná reálná čísla x, nulovou jinde.

(a) Určete konstantu c.

(b) Určete distribuční funkci $F(x)$ náhodné veličiny X.

(c) Určete $P(-1 < X < 1)$.

Řešení. Musí platit

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} c \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 + [-c \cdot e^{-x}]_0^{\infty},$$

kde $[-c \cdot e^{-x}]_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -c \cdot e^{-x} + c \cdot e^0 = c$, takže dostáváme $c = 1$. Hodnota distribuční funkce $F(x)$ je pro $x \le 0$ nulová a pro $x \ge 0$ je rovna

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Platí

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = (1 - e^{-1}) - 0 = 1 - 1/e. \qquad \square$$

B1. Pomocí transformace do polárních souřadnic spočtěte

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M\colon (x-1)^2+y^2 \geq 1$, $x^2+y^2 \leq 4$ (pozor na různé meze pro $x \geq 0$ a pro $x \leq 0$).

Řešení. Transformace je dána

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Pro oblast M platí

$$\begin{aligned} (r\cos\varphi-1)^2+(r\sin\varphi)^2 &\geq 1, & \qquad (r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2 &\leq 4,\\ r^2-2r\cos\varphi &\geq 0, & r^2 &\leq 4, \end{aligned}$$

tedy $2\cos\varphi \leq r \leq 2$. Avšak pro $\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]$ toto znamená $0 \leq r \leq 2$ a tedy

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\varphi}^{2} \frac{1}{r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^2 \frac{1}{r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [r]_{2\cos\varphi}^{2}\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} [r]_0^2\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2-2\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2\,\mathrm{d}\varphi\\ &= [2\varphi - 2\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} + [2\varphi]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 4\pi - 4. \end{aligned}$$

□

B2. Najděte obecné řešení rovnice

$$xy' = 2y + x^2.$$

Řešení. Příslušná homogenní lineární rovnice je

$$xy' = 2y.$$

Separací proměnných dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 2\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \ln|y| &= 2\ln|x| + c \\ y &= cx^2. \end{aligned}$$

Metoda variace konstant dá řešení tvaru $y = c(x)x^2$, kde $c(x)$ je řešením

$$\begin{aligned} x(c(x)x^2)' &= 2c(x)x^2 + x^2 \\ xc'(x)x^2 + xc(x)2x &= 2c(x)x^2 + x^2 \\ c'(x)x^3 &= x^2 \\ c'(x) &= -\frac{1}{x} \\ c(x) &= \ln x + c \end{aligned}$$

a tedy $y = (\ln x + c)x^2 = x^2 \ln x + cx^2$. □

B3. Z celkového počtu práce schopných obyvatel města má 20% vysokoškolské vzdělání, 35% nejvyšší vzdělání středoškolské, 40% je vyučených bez středoškolského vzdělání a 5% má pouze základní vzdělání. Nezaměstnaných mezi obyvateli s vysokoškolským vzděláním je 1%, mezi nejvýše středoškolsky vzdělanými obyvateli 5%, mezi vyučenými 15% a u těch, co mají pouze základní vzdělání, je nezaměstnanost 25%. Jaká je pravděpodobnost, že je náhodně vybraná osoba nezaměstnaná? Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný nezaměstnaný má vysokoškolské vzdělání?

Řešení. Platí

$$
\begin{aligned}
P(V\check{S}) &= 4/20, & P(S\check{S}) &= 7/20,\\
P(Vy) &= 8/20, & P(Z\check{S}) &= 1/20.
\end{aligned}
$$

Potom pravděpodobnost nezaměstnanosti je

$$
\begin{aligned}
P(N) &= P(N \mid \text{VŠ})P(\text{VŠ}) + P(N \mid \text{SŠ})P(\text{SŠ})\\
&\quad + P(N \mid \text{Vy})P(\text{Vy}) + P(N \mid \text{ZŠ})P(\text{ZŠ})\\
&= 1/100 \cdot 4/20 + 5/100 \cdot 7/20 + 15/100 \cdot 8/20 + 25/100 \cdot 1/20 = 184/2000 = 9,2\%.
\end{aligned}
$$

Podmíněná pravděpodobnost ze zadání je

$$
\begin{aligned}
P(\text{VŠ} \mid N) &= \frac{P(\text{VŠ} \cap N)}{P(N)}\\
&= \frac{P(N \mid \text{VŠ})P(\text{VŠ})}{P(N)}\\
&= \frac{1/100 \cdot 4/20}{184/2000} = 4/184 = 2,174\%.
\end{aligned}
$$

□

B4. Spojitá náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti $f(x) = c \cdot \sin x$ pro všechna $0 < x < \pi$, nulovou jinde.

(a) Určete konstantu c.

(b) Určete distribuční funkci $F(x)$ náhodné veličiny X.

(c) Určete $P(-\pi/2 < X < \pi/2)$.

Řešení. Musí platit

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} c \cdot \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0 + [-c \cdot \cos x]_0^\pi + 0,$$

kde $[-c \cdot \cos x]_0^\pi = 2c$, takže dostáváme $c = 1/2$. Hodnota distribuční funkce $F(x)$ je pro $x \leq 0$ nulová, pro $x \geq \pi$ rovna jedné a pro $0 \leq x \leq \pi$ je rovna

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1/2 \cdot \sin t\,\mathrm{d}t = 0 + [-1/2 \cdot \cos t]_0^x = 1/2 \cdot (1 - \cos x).$$

Platí

$$P(-\pi/2 < X < \pi/2) = F(\pi/2) - F(-\pi/2) = 1/2 \cdot (1 - \cos \pi/2) - 0 = 1/2. \qquad \square$$

C1. Pomocí transformace do polárních souřadnic spočtěte

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M\colon (x-1)^2+y^2 \le 1,\; x^2+(y-1)^2 \le 1.$

Řešení. Transformace je dána

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Pro oblast M platí

$$\begin{aligned} (r\cos\varphi-1)^2+(r\sin\varphi)^2 &\le 1, & \qquad (r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi-1)^2 &\le 1,\\ r^2-2r\cos\varphi &\le 0, & r^2-2r\sin\varphi &\le 0, \end{aligned}$$

tedy $0 \le r \le \min\{2\cos\varphi,\, 2\sin\varphi\}$. To znamená $\varphi \in [0,\pi/2]$ a ve skutečnosti lze díky symetrii počítat

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sin\varphi} \frac{1}{r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\int_0^{\pi/4} [r]_0^{2\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\int_0^{\pi/4} 2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2[-2\cos\varphi]_0^{\pi/4} = 2(2-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$\square$

C2. Najděte obecné řešení rovnice

$$xy' = y + 1.$$

Řešení. Příslušná homogenní lineární rovnice je

$$xy' = y.$$

Separací proměnných dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \ln|y| &= \ln|x| + c \\ y &= cx. \end{aligned}$$

Metoda variace konstant dá řešení tvaru $y = c(x)x$, kde $c(x)$ je řešením

$$\begin{aligned} x(c(x)x)' &= c(x)x + 1 \\ xc'(x)x + xc(x) &= c(x)x + 1 \\ c'(x)x^2 &= 1 \\ c'(x) &= \frac{1}{x^2} \\ c(x) &= -\frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

a tedy $y = (-\frac{1}{x} + c)x = -1 + cx$. □

C3. V písemce se objevil náročný příklad. Ze studentů si $1/2$ zapomněla kalkulačku a zcela nezávisle si $1/4$ studentů zapomněla tahák. Studenti vybavení oběma pomůckami vypočítali příklad s pravděpodobností 80%, studenti vybaveni pouze kalkulačkou s pravděpodobností 50%, studenti vybavení pouze tahákem s pravděpodobností 30% a studenti bez jakékoliv pomůcky pak s pravděpodobností 20%. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený student příklad vypočítal? Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané správné řešení pochází od studenta bez taháku?

Řešení. Díky nezávislosti platí

$$P(K \cap T) = 1/2 \cdot 3/4 = 3/8, \qquad P(K \cap \neg T) = 1/2 \cdot 1/4 = 1/8,$$
$$P(\neg K \cap T) = 1/2 \cdot 3/4 = 3/8, \qquad P(\neg K \cap \neg T) = 1/2 \cdot 1/4 = 1/8.$$

Potom pravděpodobnost úspěchu je

$$\begin{aligned} P(U) &= P(U \mid K \cap T)P(K \cap T) + P(U \mid K \cap \neg T)P(K \cap \neg T) \\ &\quad + P(U \mid \neg K \cap T)P(\neg K \cap T) + P(U \mid \neg K \cap \neg T)P(\neg K \cap \neg T) \\ &\quad = 8/10 \cdot 3/8 + 5/10 \cdot 1/8 + 3/10 \cdot 3/8 + 2/10 \cdot 1/8 = 40/80 = 1/2 = 50\%. \end{aligned}$$

Podmíněná pravděpodobnost ze zadání je

$$\begin{aligned} P((K \cap \neg T) \cup (\neg K \cap \neg T) \mid U) &= \frac{P(K \cap \neg T \cap U) + P(\neg K \cap \neg T \cap U)}{P(U)} \\ &= \frac{P(U \mid K \cap \neg T)P(K \cap \neg T) + P(U \mid \neg K \cap \neg T)P(\neg K \cap \neg T)}{P(U)} \\ &= \frac{5/10 \cdot 1/8 + 2/10 \cdot 1/8}{1/2} = 7/40 = 17,5\%. \end{aligned}$$

□

C4. Spojitá náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti $f(x) = \frac{c}{x^2+1}$ pro všechna kladná reálná čísla x, nulovou jinde.

(a) Určete konstantu c.

(b) Určete distribuční funkci $F(x)$ náhodné veličiny X.

(c) Určete $P(1 < X < \sqrt{3})$.

Řešení. Musí platit

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{c}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0 + [c \cdot \operatorname{arctg} x]_0^{\infty},$$

kde $[c \cdot \operatorname{arctg} x]_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty} c \cdot \operatorname{arctg} x + c \cdot \operatorname{arctg} 0 = c \cdot \pi/2$, takže dostáváme $c = 2/\pi$. Hodnota distribuční funkce $F(x)$ je pro $x \leq 0$ nulová a pro $x \geq 0$ je rovna

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{2/\pi}{x^2+1}\,\mathrm{d}t = 0 + [2/\pi \cdot \operatorname{arctg} x]_0^{x} = 2/\pi \cdot \operatorname{arctg} x.$$

Platí

$$P(1 < X < \sqrt{3}) = F(\sqrt{3}) - F(1) = 2/\pi \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 2/\pi \cdot \operatorname{arctg} 1 = 2/\pi \cdot \pi/3 - 2/\pi \cdot \pi/4 = 1/6. \ \square$$

D1. Pomocí transformace do polárních souřadnic spočtěte

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M\colon (x-1)^2+(y-1)^2 \le 2$, $(x+1)^2+(y-1)^2 \le 2$.

Řešení. Transformace je dána

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Pro oblast M platí

$$\begin{aligned} (r\cos\varphi-1)^2+(r\sin\varphi-1)^2 &\le 2, & (r\cos\varphi+1)^2+(r\sin\varphi-1)^2 &\le 2,\\ r^2-2r(\cos\varphi+\sin\varphi) &\le 0, & r^2-2r(-\cos\varphi+\sin\varphi) &\le 0, \end{aligned}$$

tedy $0 \le r \le 2\min\{\cos\varphi+\sin\varphi, -\cos\varphi+\sin\varphi\}$. To je možné pouze pro $\varphi \in [\pi/4, 3\pi/4]$ a ve skutečnosti lze díky symetrii počítat

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{-2\cos\varphi+2\sin\varphi} \frac{1}{r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} [r]_0^{-2\cos\varphi+2\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} (-2\cos\varphi+2\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2[-2\sin\varphi-2\cos\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} = 4(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

□

D2. Najděte obecné řešení rovnice
$$xy' = y + x.$$

Řešení. Příslušná homogenní lineární rovnice je
$$xy' = y.$$

Separací proměnných dostáváme
$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \ln|y| &= \ln|x| + c \\ y &= cx. \end{aligned}$$

Metoda variace konstant dá řešení tvaru $y = c(x)x$, kde $c(x)$ je řešením
$$\begin{aligned} x(c(x)x)' &= c(x)x + x \\ xc'(x)x + xc(x) &= c(x)x + x \\ c'(x)x^2 &= x \\ c'(x) &= \frac{1}{x} \\ c(x) &= \ln|x| + c \end{aligned}$$

a tedy $y = (\ln|x| + c)x = x\ln|x| + cx$. $\square$

D3. Z celkového počtu práce schopných obyvatel města má 25% vysokoškolské vzdělání, 35% nejvyšší vzdělání středoškolské, 30% je vyučených bez středoškolského vzdělání a 10% má pouze základní vzdělání. Nezaměstnaných mezi obyvateli s vysokoškolským vzděláním je 1%, mezi nejvýše středoškolsky vzdělanými obyvateli 5%, mezi vyučenými 15% a u těch, co mají pouze základní vzdělání, je nezaměstnanost 25%. Jaká je pravděpodobnost, že je náhodně vybraná osoba nezaměstnaná? Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný nezaměstnaný má vysokoškolské vzdělání?

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} P(\text{VŠ}) &= 5/20, & P(\text{SŠ}) &= 7/20, \\ P(\text{Vy}) &= 6/20, & P(\text{ZŠ}) &= 2/20. \end{aligned}$$

Potom pravděpodobnost nezaměstnanosti je

$$\begin{aligned} P(N) &= P(N \mid \text{VŠ})P(\text{VŠ}) + P(N \mid \text{SŠ})P(\text{SŠ}) \\ &\quad + P(N \mid \text{Vy})P(\text{Vy}) + P(N \mid \text{ZŠ})P(\text{ZŠ}) \\ &= 1/100 \cdot 5/20 + 5/100 \cdot 7/20 + 15/100 \cdot 6/20 + 25/100 \cdot 2/20 = 180/2000 = 9\%. \end{aligned}$$

Podmíněná pravděpodobnost ze zadání je

$$\begin{aligned} P(\text{VŠ} \mid N) &= \frac{P(\text{VŠ} \cap N)}{P(N)} \\ &= \frac{P(N \mid \text{VŠ})P(\text{VŠ})}{P(N)} \\ &= \frac{1/100 \cdot 5/20}{180/2000} = 5/180 = 2,778\%. \end{aligned}$$

□

D4. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti na intervalu $(2, \infty)$ rovnu $f(x) = c/x^3$, jinde nulovou.

(a) Určete reálné číslo c tak, aby opravdu šlo o hustotu pravděpodobnosti.

(b) Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

(c) Určete $P(1 < X < 3)$.

Řešení. Musí platit

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{2} 0\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} c/x^3\,\mathrm{d}x = 0 + [-c/2x^2]_2^\infty,$$

kde $[-c/2x^2]_2^\infty = \lim_{x\to\infty} -c/2x^2 + c/(2 \cdot 2^2) = c/8$, takže dostáváme $c = 8$. Hodnota distribuční funkce $F(x)$ je pro $x \leq 2$ nulová a pro $x \geq 2$ je rovna

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{2} 0\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{x} 8/x^3\,\mathrm{d}t = 0 + [-4/x^2]_2^x = 1 - 4/x^2.$$

Platí

$$P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) = (1 - 4/3^2) - 0 = 5/9. \qquad \square$$