(A)

MB103 - podzim 2014
vnitro 1

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{xy}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\frac{1}{x^2+y^2}}_{\text{omezená } \in \langle -1,1\rangle} = \underline{\underline{0}}$

2. Taylor 2. stupně v $[0,0]$ z $f(x,y)=\frac{x\sin y+1}{x+1}$:

$f(0,0)=1$

$f'_x(x,y)=\frac{\sin y-1}{(x+1)^2}$; $f'_y(x,y)=\frac{x\cdot\cos y}{x+1}$

$f''_{xx}(x,y)=(\sin y-1)\cdot(-2)\cdot(x+1)^{-3}$

$f''_{xy}(x,y)=\frac{\cos y}{(x+1)^2}$

$f''_{yy}(x,y)=-\frac{x\cdot\sin y}{x+1}$

Dosazením $[0,0]$: $T_{f,[0,0]}(x,y)=1+(-1)\cdot x+0\cdot y+\frac{1}{2}(2\cdot x^2+2\cdot 1\cdot xy+0\cdot y^2)=$

$=\underline{\underline{1-x+x^2+xy}}$

3. $f(x,y)=4x^3-2x^2y+y^2-4y$

$f'_x(x,y)=12x^2-4xy$

$f'_y(x,y)=-2x^2+2y-4$

stac. body $\Leftrightarrow$ $12x^2=4xy$ $\Leftrightarrow$ $\underline{x=0} \vee \underline{y=3x}$

$-2x^2+2y-4=0$

$\Downarrow$ $2y=4$, $\underline{y=2}$

$\Downarrow$ $-2x^2+6x-4=0$, $-2(x-2)(x-1)=0$, $\underline{x=2} \vee \underline{x=1}$

Stac. body jsou $[0,2]$, $\cancel{[2,6]}$ mimo, $[1,3]$

hodnoty funkce -4, $\cancel{-4}$, -5

Hranice oblasti: úsečky ležící na přímkách $x=0, y=0, x+y=5$.

i) $\underline{x=0}$: $f(0,y)=y^2-4y$, stac. bod $y=2$: $[0,2]$

ii) $\underline{y=0}$ $f(x,0)=4x^3$, stac. bod $x=0$: $[0,0]$

iii) $\underline{x+y=5}$ $\underbrace{f(x,5-x)}_{g(x)=}=4x^3-2x^2(5-x)+(5-x)^2-4(5-x)=6x^3-9x^2-6x+5$

$g'(x)=18x^2-18x-6$ $\quad g'(x)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$ $\quad x_2<0$ ✗ $\quad \underline{\underline{x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{6}}}$

$\left[\frac{3+\sqrt{21}}{6}, \frac{27-\sqrt{21}}{6}\right]$

Testovací body:

$[0,2]$	$[1,3]$	$[0,0]$	$[5,0]$	$[0,5]$	$[x_1,5-x_1]$
-4	-5	0	500	5	$\doteq -4{,}8463$
	MIN		MAX.		

4. $xy+yz+2x=-1$ $\quad z=z(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $y+y\cdot z'_x+x\cdot z'_x+z=0$

dosaď $[1,2,-1]$: $2+3z'_x-1=0 \Leftrightarrow \underline{z'_x=-\frac{1}{3}}$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $x+z+y\cdot z'_y+x\cdot z'_y=0$

dosaď: $\underline{z'_y=0}$

Tečná rovina: $z+1=-\frac{1}{3}(x-1)+0(y-2) \Leftrightarrow \underline{x+3z+2=0}$

Přímo: gradient v $[1,2,-1]$ je $(1,0,3)$, proto v tomto bodě je tečná rovina $x+3z=-2$ (dosazením)

(B)

M8103 - podzim 2014
vnitro 1

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$; např. v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi) = \underline{\underline{0}},$$

neboť $|\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi| \leq |\cos^2\varphi||\sin\varphi| + |\sin^2\varphi|\cdot|\cos\varphi| \leq |\cos^2\varphi| + |\sin^2\varphi| = 1$ a $r\to 0$, tedy lim je typu 0 · (ohraničená fce).

2. Taylor 2. stupně v $[1,1]$ z $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

$f(1,1) = \ln 2$

$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$; $f'_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$

$f''_{xx}(x,y) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$

$f''_{yy}(x,y) = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

Dosazením $[1,1]$: $T_{f,[1,1]}(x,y) = \ln 2 + 1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-1) + \frac{1}{2}\cdot\left(0\cdot(x-1)^2 + 2(-1)\cdot(x-1)(y-1) + 0\cdot(y-1)^2\right) =$

$$= \underline{\underline{\ln 2 + (x-1) + (y-1) - (x-1)(y-1)}}$$

3. Úloha analogická A3 $x \leftrightarrow -y$, $y \leftrightarrow -x$, min $\leftrightarrow$ max

Výpočet od A3: MAX $[-3,-1]$ s hodnotou 5
MIN $[0,-5]$ s hodnotou -500.

4. $x^2+y^2+xz-yz = 2$, tečná rovina v bodě $[1,0,1]$.

Přímo: gradient (F'_x, F'_y, F'_z) je v $[1,0,1]$ roven: $(3,-1,1)$, proto je tečná rovina $3x-y+z=4$.

Nebo přes $\underline{z = z(x,y)}$:

$z - z_0 = z'_x(x-x_0) + z'_y(y-y_0)$ kde $[x_0,y_0,z_0] = [1,0,1]$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $2x + z + x\cdot z'_x - y\cdot z'_x = 0$, odtud $z'_x = -3$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $2y + xz'_y - y\cdot z'_y - z = 0$, odtud $z'_y = 1$.

Dosadíme $z - 1 = -3(x-1) + 1\cdot(y-0)$, tj. $\underline{\underline{3x - y + z = 4}}$.

MB103 – podzim 2017
vnitro 1

(C) 1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$; lim neexistuje, neboť např. pro $y=x$ máme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{2x^2}=0$, pro $y=-x$ máme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ = neex.

2. Taylor 2. stupně v $[1,1]$ z $f(x,y)=\dfrac{\ln x}{y}$

$f(1,1)=0$

$f'_x(x,y)=\dfrac{1}{xy}$, $f'_y(x,y)=-\dfrac{\ln x}{y^2}$

$f''_{xx}(x,y)=-\dfrac{1}{x^2y}$, $f''_{xy}(x,y)=-\dfrac{1}{xy^2}$

$f''_{yy}(x,y)=\dfrac{2\ln x}{y^3}$

Dosazením $[1,1]$: $T_{f;[1,1]}(x,y)=0+1\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)+\frac{1}{2}\big(-1(x-1)^2+2(-1)(x-1)(y-1)+0(y-1)^2\big)=$

$= x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2-(x-1)(y-1).$

3. $f(x,y)=4x^2y-16x^2-y^2+4y$ (lze zjednodušit díky úvaze $f(x,y)=f(-x,y)$)

$f'_x(x,y)=8xy-32x$ stac. body: $8xy=32x$, $4x^2-2y+4=0$ $\iff$ $x=0 \vee y=4$; $x=0 \Downarrow y=2$; $y=4 \Downarrow x^2=1$, $x=1 \vee x=-1$

$f'_y(x,y)=4x^2-2y+4$

Stac. body jsou $[0,2]$, $\cancel{[1,4]}$, $\cancel{[-1,4]}$ (poslední 2 ale leží mimo oblast!)

Hranice oblasti: úsečky ležící na $x=0$, $x+y=3$, $y-x=3$

i) $x=0$: $f(0,y)=-y^2+4y$, stac. bod $y=2$: $[0,2]$

ii) $x+y=3$, $x\in\langle 0,3\rangle$: $f(x,3-x)=-4x^3-5x^2+2x+3$; stac. body $-12x^2-10x+2=0 \iff 6x^2+5x-1=0$ $\iff (6x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1 \vee x=\frac{1}{6}$

$\cancel{[-1,4]}$ mimo, $[\frac{1}{6},\frac{17}{6}]$

iii) $y-x=3$, $x\in\langle -3,0\rangle$: $f(x,x+3)=4x^3-5x^2-2x+3$; stac. body $12x^2-10x-2=0 \iff 6x^2-5x-1=0 \iff (6x+1)(x-1)=0 \iff x=1 \vee x=-\frac{1}{6}$

$\cancel{[1,4]}$ mimo, $[-\frac{1}{6},\frac{17}{6}]$

Testované body:

$[0,2]$	$[\frac{1}{6},\frac{17}{6}]$	$[-\frac{1}{6},\frac{17}{6}]$	$[3,0]$	$[-3,0]$
4 MAX	$\doteq 3{,}18$	$\doteq 3{,}18$	-144 MIN	-144 MIN

4. Přímo: gradient (F'_x,F'_y,F'_z) je $(0,0,2)$, odtud tečná rovina $2z=2$.

Nebo přes $z=z(x,y)$: $\dfrac{\partial}{\partial x}$: $y-y\cdot z'_x+2z\cdot z'_x=0 \Rightarrow z'_x=0$

$z-z_0=z'_x(x-x_0)+z'_y(y-y_0)$; $\dfrac{\partial}{\partial y}$: $x-y\cdot z'_y-z+2z\cdot z'_y=0 \Rightarrow z'_y=0$

$[x_0,y_0,z_0]=[1,0,1]$

Dosadíme: $z-1=0\cdot(x-1)+0\cdot(y-0)$, tj. $z=1$

D

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y-x}$; neexistuje ; např. pro $y=-x$ je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{-2x}=0$,

zatímco pro $y=x+x^2$ je $\lim \frac{x^2}{y-x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$.

2. Taylor 2. stupně v $[0,0]$ z $f(x,y)=\frac{\cos x}{y+1}$

$f(0,0)=1$

$f'_x(x,y)=\frac{-\sin x}{y+1}$; $f'_y(x,y)=-\frac{\cos x}{(y+1)^2}$

$f''_{xx}(x,y)=\frac{-\cos x}{y+1}$

$f''_{xy}(x,y)=\frac{\sin x}{(y+1)^2}$

$f''_{yy}(x,y)=2\frac{\cos x}{(y+1)^3}$

Dosazením $[0,0]$:

$$T_{f,[0,0]}(x,y)=1+0\cdot(x-0)-1\cdot(y-0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left((-1)\cdot(x-0)^2+2\cdot 0\cdot(x-0)(y-0)+2\cdot(y-0)^2\right)=$$
$$=\underline{1-y\cancel{+}-\frac{1}{2}x^2+y^2}$$

3. $f(x,y)=4x^2y+y^2-4y$. Protože $f(x,y)=f(-x,y)$, omezíme se pouze na $x\geq 0$.

$f'_x(x,y)=8xy$

$f'_y(x,y)=4x^2+2y-4$

stac. body $\begin{array}{l} 8xy=0 \\ 4x^2+2y-4=0\end{array} \iff x=0 \;\vee\; y=0$, kde $x=0 \Downarrow y=2$; $y=0 \Downarrow x=1 \vee x=-1$

Stac. body $[0,2]$, $[1,0]$, $[-1,0]$.

Hranice oblasti $x=0$, $x+y=3$, ($y-x=3$ díky předpokladu $x\geq 0$ nemusíme uvažovat)

i) $x=0$: $f(0,y)=y^2-4y$, stac. bod $y=2$: $[0,2]$

ii) $x+y=3$, $x\in\langle 0,3\rangle$: $f(x,3-x)=-4x^3+13x^2-2x-3$; stac. body $-12x^2+26x-2=0 \iff$
$\iff 6x^2-13x+1=0$
$\iff x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{145}}{12}$

$x_1 \doteq 2{,}084$ $\quad x_2\doteq 0{,}08$

Testované body

$[x,y]$	$[0,2]$	$[1,0]$	$[x_1,3-x_1]$	$[x_2,3-x_2]$	$[3,0]$	$[0,3]$
$f(x,y)$	-4 MIN	0	$\doteq 13{,}088$ MAX	$\doteq -3{,}08$	0	-3

Maximum v $[x_1,3-x_1]$, $[-x_1,3-x_1]$, minimum v $[0,2]$.

4. $x^2+xyz+z^2=1$. $[1,-1,1]$

Přímo: gradient (F'_x,F'_y,F'_z) je $(1,1,1)$, tj. tečná rovina $x+y+z=1$

Nebo přes $z=z(x,y)$:

$z-z_0=z'_x(x-x_0)+z'_y(y-y_0)$

$[x_0,y_0,z_0]=[1,-1,1]$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $2x+yz+xy\cdot z'_x+2z\cdot z'_x=0 \Rightarrow z'_x=-1$

$xz+xy\cdot z'_y+2z\cdot z'_y=0 \Rightarrow z'_y=-1$

$z-1=(-1)(x-1)+(-1)(y+1) \Rightarrow x+y+z=1$