Definiční obor funkce

Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-1) + \sqrt{|x|+|y|-\sqrt{2}}.$$

$|x|+|y|-\sqrt{2} \geq 0$

I. $x \geq 0, y \geq 0$

$x+y \geq \sqrt{2}$

II. osově podle y

$x \leq 0, y \geq 0$

III. $x \geq 0, y \leq 0$

osově podle x

IV.

složením osových symetrií

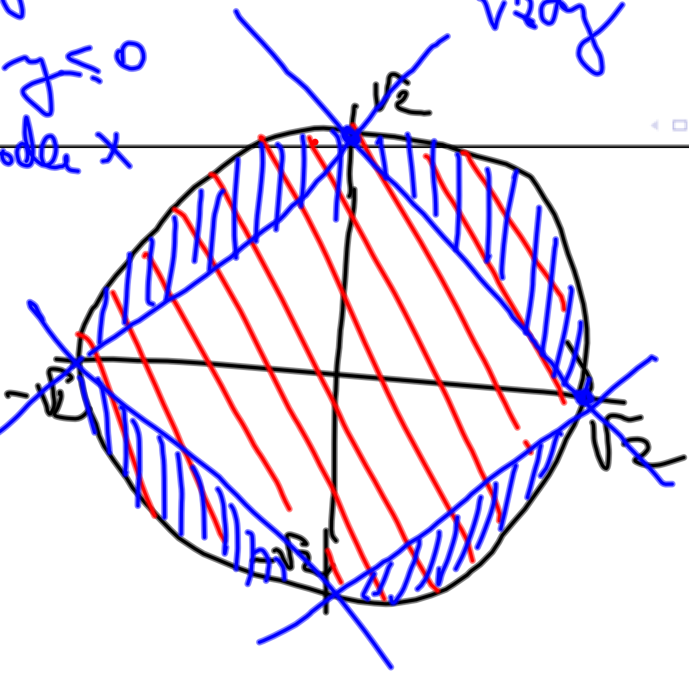
$x^2+y^2-1 \in \langle -1, 1\rangle$

$[y = \arccos x \iff x = \cos y]$

$-1 \leq x^2+y^2-1 \leq 1$

$0 \leq x^2+y^2 \leq 2$

vždy



Příklad

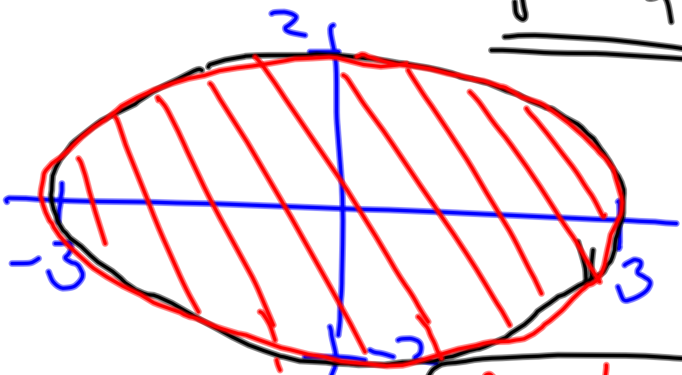
Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - (\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4})}$,

b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$,

a) $(x,y) \in D(f) \iff 1 - (\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}) \geq 0$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$



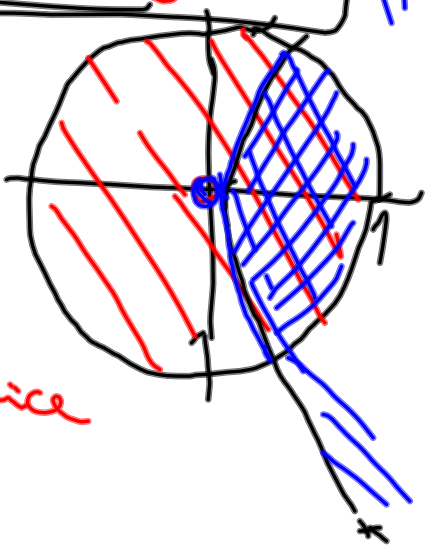
b) $4x - y^2 \geq 0 \iff \boxed{y^2 \leq 4x}$

$1 - x^2 - y^2 > 0 \wedge 1 - x^2 - y^2 \neq 1$

$\boxed{0 < x^2 + y^2 < 1}$

$-x^2 - y^2 \neq 0$

$x^2 + y^2 \neq 0$



bez hranice

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y,z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$-1 \le \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1 \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$-\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$$

1. $z \ge 0$ automaticky platí; umocníme druhou:

$$z^2 \le x^2+y^2 \iff x^2+y^2-z^2 \ge 0$$

2. $z < 0$, automaticky platí 2. nerovnost, umocním

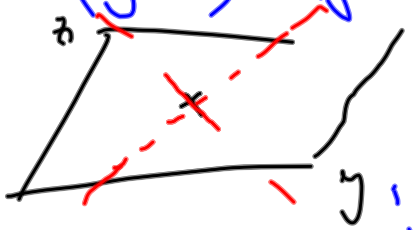
$$x^2+y^2 \ge z^2$$

$z = \text{konst.} \; (=: c)$ $\quad x^2+y^2 = c^2$

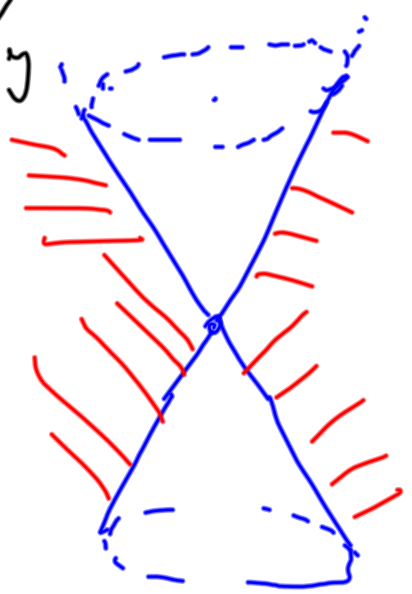
„postupně zvětšující se kružnice"

pro $x=0$: $y^2-z^2=0 \iff (y+z)(y-z)=0$

$$\iff (y=z) \vee (y=-z)$$



Hranicí je dvojitý kužel



Příklad

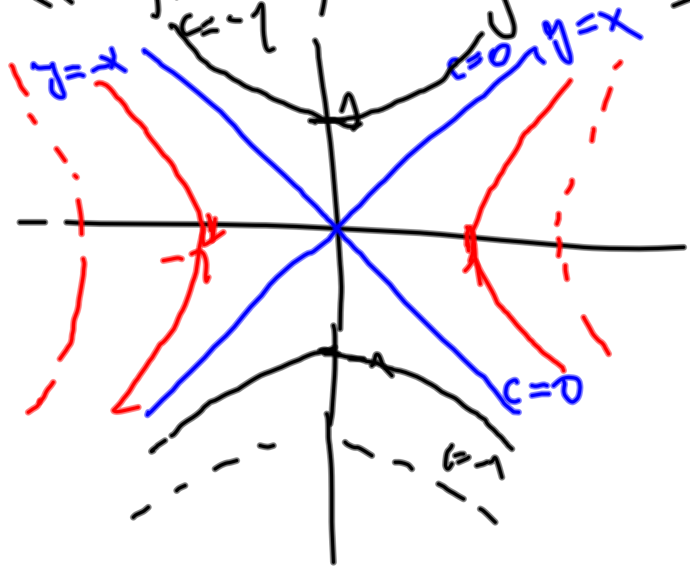
Načrtněte vrstevnice funkcí:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$,

b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

a) vrstevnice na úrovni $c \in \mathbb{R}$:

$f_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 = c\}$



$\underline{c=0:}$ $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 = y^2$

$\underline{c=1}$ $x^2 - y^2 = 1$ hyperbola

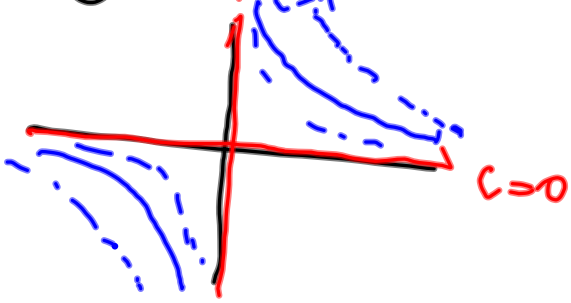
$\underline{c=-1}$ $x^2 - y^2 = -1$

b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

$c \in \mathbb{R}$

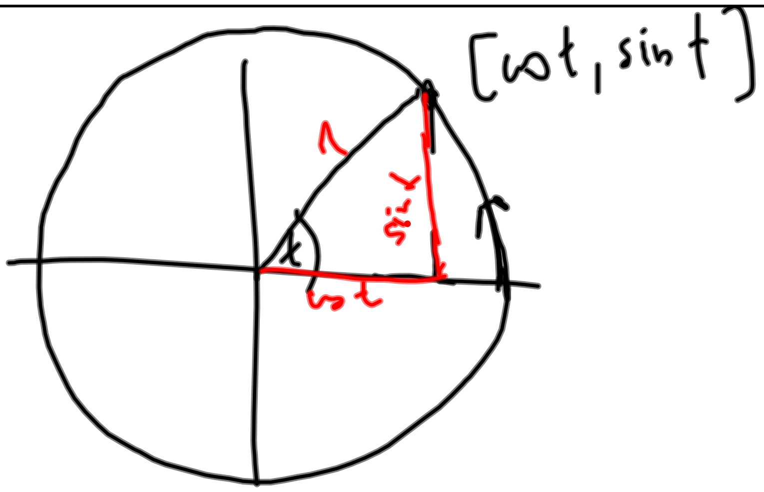
$f_c = \{(x,y);\ \sqrt{xy} = c\}$

pouze $c \geq 0$,



$\underline{c=0:}$ $xy = 0$

$\underline{c>0:}$ $xy = c^2$, $y = \frac{c^2}{x}$


[cos t, sin t]
1
sin t
cos t
t
1

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových“ křivek (správněji spíše jejich *obrazů*).

Definice

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Je třeba rozlišovat křivku a její obraz v E_n:

Příklad

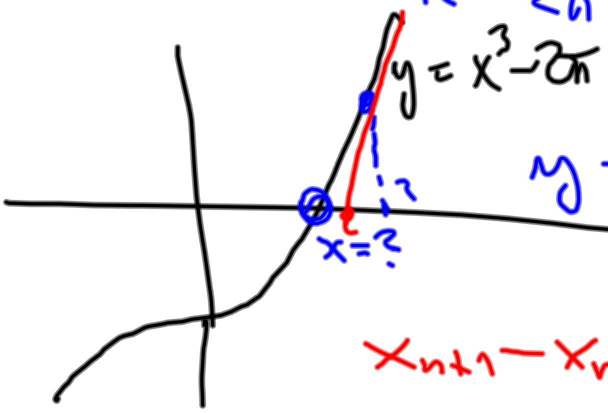
Obrazem křivky $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ v rovině E_2 je jednotková kružnice, stejně jako v případě **jiné** křivky
$t \mapsto (\cos(t^3), \sin(t^3))$, $t \in \mathbb{R}$. „jedno kolo“ za $\sqrt[3]{2\pi}$

není 3× rychlejší! (to by byla křivka $t \mapsto (\cos(3t), \sin(3t))$)

Taylor, Newton: $x = \sqrt[3]{2\pi}$

$x^3 = 2\pi$

$x^3 - 2\pi = 0$ $\quad x = ?$



$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$ n-tá iterace

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Příklad

Určete tečnu křivky dané předpisem

$$f(t) = (2\cos t + \cos 3t, \sin 2t, t)$$

v bodě $t = \frac{3\pi}{2}$.

$f'(t) = (-2\sin t - 3\sin 3t, 2\cos 2t, 1)$

$f'(\frac{3\pi}{2}) = (2-3, -2, 1) = (-1, -2, 1)$

tečna: $f(\frac{3\pi}{2}) = (0, 0, \frac{3\pi}{2})$

rce tečny: $(0, 0, \frac{3\pi}{2}) + k \cdot (-1, -2, 1)$

$k \in \mathbb{R}$