Hodíme jedenkrát kostkou, množina elementárních jevů je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Jevovým polem nechť je $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \Omega\}$.
Zjistěte jestli zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dané předpisem

a) $X(\omega_i) = i$ pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

b) $X(\omega_1) = X(\omega_2) = -2, X(\omega_3) = X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = 3$,

je náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$.

a) chceme umět např. $P(X=1) = P(X^{-1}(\{1\})) = P(\{\omega_1\})$ nezháme

nebo $\underbrace{P(-1 \leq X \leq 3)}_{=P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\})}$ nezháme

X není náhodná veličina

Ale: $P(1 \leq X \leq 2) = P(\{x_1, x_2\})$

b) ANO, např. $P(1 \leq X \leq 3) = P(\{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\})$

Příklad

Je dáno jevové pole $(\Omega, \mathcal{A})$, kde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ a

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4, \omega_5\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \Omega\}.$$

Najděte nějaké (co nejobecnější) zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$, které bude náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$.

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = h$$

$$X(\omega_3) = l$$

$$X(\omega_4) = X(\omega_5) = k$$

$$k, l, h \in \mathbb{R}$$

Příklad

Třikrát nezávisle na sobě hodíme mincí. Náhodná veličina X udává počet hlav, které padnou při těchto hodech. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X.

$$X : \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{3}{8}$$

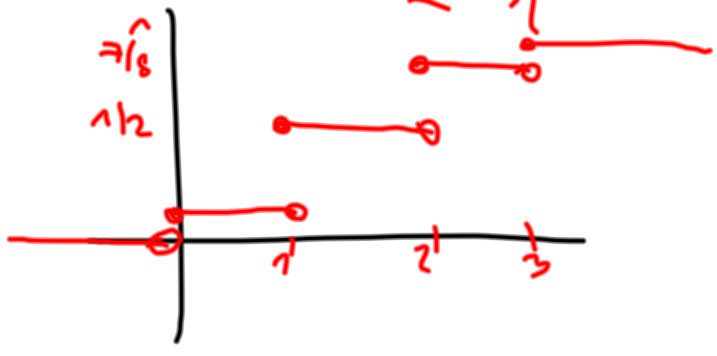
$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

pravd. fce: $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{pro } t=0 \text{ nebo } t=3 \\ \frac{3}{8} & \text{pro } t=1 \text{ nebo } t=2 \end{cases}$

$$F_X(t) = P(X \leq t) =$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/8 & t \in \langle 0, 1) \\ 1/2 & t \in \langle 1, 2) \\ 7/8 & t \in \langle 2, 3) \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$



Hustota vs. distr. fce [a ≤ b]

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

hustota

Distr. fce: $F_X(t) = P(X \leq t)$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) =$$
$$= F_X(b) - F_X(a)$$

11 24-12:42

1. c pro $x \in (a, b)$, $a < b$
2. cx pro $x \in (0, 1)$,
3. cx pro $x \in (-1, 2)$,
4. $cx \sin x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
5. ce^{x} pro $x \in (0, \infty)$,
6. ce^{-x} pro $x \in (0, \infty)$,
7. $\frac{c}{1+x^2}$.

1. $\underline{c \geq 0}$ $\quad 1 = P(-\infty < X < \infty) = P(a < X < b) =$

$$= \int_a^b c \cdot dx = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = \frac{1}{b-a}}}$$

$X \sim Rs(a,b)$ rovnoměrná spojitá

distr. fce

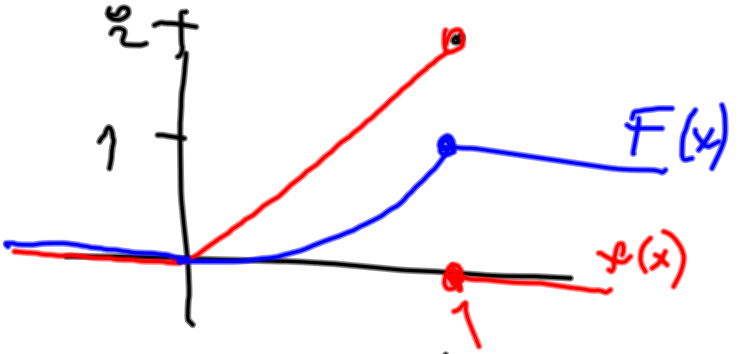
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \int_a^t \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{t-a}{b-a} & t \in (a,b) \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$

2. $f(x) = c \cdot x, \ x \in \langle 0, 1)$

$\underline{c \geq 0}$ (nezápornost hustoty)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 c \cdot x\,dx = c \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{c}{2}$$

$\Rightarrow \underline{c = 2}$



$$F_X(t) = \int_0^t 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^t = t^2$$

pro $t \in \langle 0, 1\rangle$

3. $f(x) = c \cdot x \qquad x \in (-1, 2)$

není hustota, pro $x < 0 \Rightarrow c < 0$ ↯
pro $x > 0 \Rightarrow c > 0$

4. $f(x) = c\, x \sin x \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{x \sin x \geq 0} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} c\, x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \ldots = 2c$$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2} \qquad f_X(x) = \frac{1}{2} x \sin x$ je hustota N.V. na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

11 24-12:56

5. $f(x) = c \cdot e^{x}$ pro $x \in (0, \infty)$

$$1 = \int_0^\infty c \cdot e^{x}\, dx = c \cdot \int_0^\infty e^{x}\, dx = c \cdot \left[e^{x}\right]_0^\infty = c \cdot \infty$$

NEJDE O HUSTOTU.

6. $f(x) = c \cdot e^{-x}$ pro $x \in (0, \infty)$

$$1 = \int_0^\infty c\, e^{-x}\, dx = \ldots = c$$

$f_X(x) = e^{-x}$ je hustota

7. $f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

nezáp. o. k.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = c \cdot \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= c \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi \cdot c$$

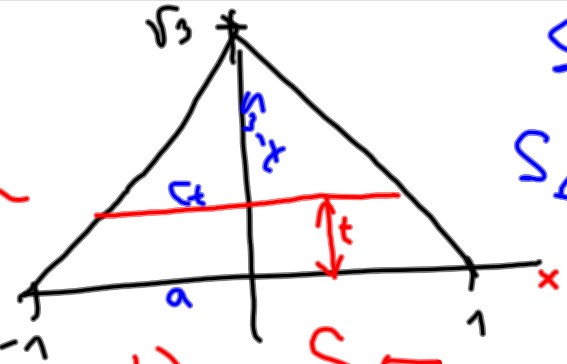
$\Rightarrow c = \dfrac{1}{\pi}$ $\quad f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ je hustota na $(-\infty, \infty)$

V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(-1, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, \sqrt{3})$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete

1. rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa,
2. rozdělení vzdálenosti dítěte od nejbližší strany lesa.

ad 1.

X ... vzdálenost dítěte od osy x



$S_\Delta = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$S_{\text{lichoběžník}} = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{2+c_t}{2} \cdot t$

$F_X(t) = P(X \le t) = \frac{S_{\text{lichoběžník}}}{S_\Delta} = \frac{2t - \frac{t^2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{t^2}{3}$ $\quad t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$

[Z podobnosti Δ: $\frac{c_t}{2} = \frac{\sqrt{3}-t}{\sqrt{3}} \Rightarrow c_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - t)$

Příklad

V zásilce s 10 výrobky je 8 kvalitních (z nich je 5 první jakosti a 3 jsou druhé jakosti) a 2 zmetky. Ze zásilky vybereme bez vracení 2 výrobky. Náhodná veličina X nechť značí počet vybraných kvalitních výrobků a Y počet vybraných výrobků první jakosti. Určete sdruženou i marginální pravděpodobností funkci a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y stochasticky nezávislé.

$$p(x,y) = P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{5}{y}\binom{3}{x-y}\cdot\binom{2}{2-x}}{\binom{10}{2}}$$

$x \in \{0,1,2\}$

$y \in \{0,1,2\}$

$x \geq y$

sdružená prav. fce

$x \backslash y$	0	1	2	
0	$p(0,0)$	0	0	$P(X=0)$
1	$p(1,0)$	$p(1,1)$	0	$P(X=1)$
2	$p(2,0)$	$p(2,1)$	$p(2,2)$	$P(X=2)$
	$P(Y=0)$	$P(Y=1)$	$P(Y=2)$	1

Nejsou nezávislé, např. $P(X=0)\cdot P(Y=2) \neq 0$

Spojitý náhodný vektor (X, Y) má hustotu

$$f(x, y) = 24x^2y(1-x)$$

pro $0 \le x, y < 1$ a jinde nulovou. Dokažte, že X a Y jsou stochasticky nezávislé.

Marginální hustota X: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy =$

$$= \int_0^1 24x^2y(1-x)\, dy = 24x^2(1-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 12x^2(1-x) \quad \text{pro } x \in (0,1)$$

Y: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_0^1 24x^2y(1-x)\, dx =$

$$= 24y\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2y \quad \text{pro } y \in (0,1).$$

Platí: $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\Rightarrow$ X a Y jsou stoch. nezávislé.