Binom. rozdělení :

$X \sim Bi(n, p)$, např. hážu 1000 x mincí

X... počet hlav

$X \sim Bi(1000, \frac{1}{2})$

$$P[X = k] = \binom{1000}{k} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{1000-k}}$$

12 1-12:16

$A = \mathbb{R}^2$

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}\,dA =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Pol.souř.: $\left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right|$

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\cdot dr\,d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\infty} r\cdot e^{-r^2}\,dr = \left| \begin{array}{l} t = r^2 \\ dt = 2r\,dr \end{array} \right| =$$

$$= \pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = \pi\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

12 1-12:26

Bez názvu * - SMART Notebook

Soubor Upravit Zobrazit Vložit Formát Kreslení Nápověda

Polsouř.: $\left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right|$

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\cdot dr\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\cdot\int_0^{\infty} r\cdot e^{-r^2}\,dr = \left| \begin{array}{l} t = r^2 \\ dt = 2r\,dr \end{array} \right| =$$

$$= \pi\cdot\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = \pi\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Rozšířit stránku

Automaticky skrýt

12 1-12:16

12 1-12:26

Normální rozdělení $N(0,1)$

Příslušnou distribuční funkci

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\, dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, přesto se s ní numericky běžně počítá (pomocí tabulek nebo softwarových aplikací).
Hustotě f_X se také často říká **Gaussova křivka**.

Příklad

Nechť má X binomické rozdělení s parametry $n = 4, p = 2/3$. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny $Y = (X-2)^2$ a nakreslete graf její distribuční funkce.

$X \sim Bi(4, \frac{2}{3}) \quad P(X=k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$

$k \in \{0,1,2,3,4\}$

Pro $l \in \{0,1,4\}$:

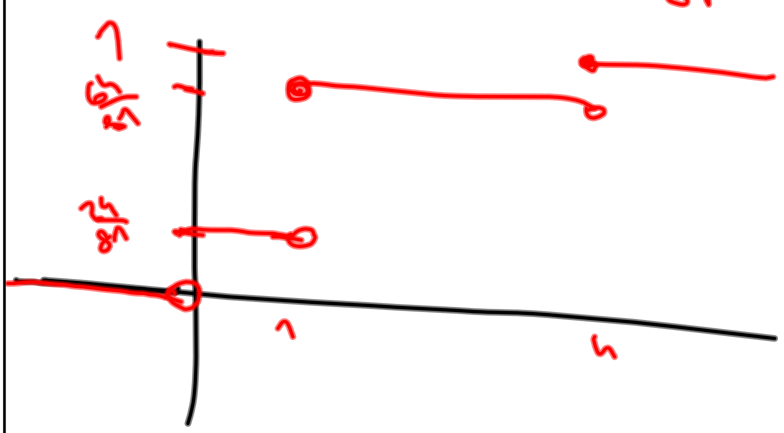
$P(Y=l)$ lze spočítat takto:

$P(Y=4) = P(|X-2|^2 = 4) = P(|X-2| = 2) =$

$P(X=4 \vee X=0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{17}{81}$

podobně $P(Y=0) = \frac{24}{81}$

$P(Y=1) = \frac{40}{81}$



distr. fce

Příklad

Mějme náhodnou veličinu X hustoty $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pro $x \overset{(*)}{>} 0$ (a jinde nulové). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$.

Určíme nejprve distr. fci n.v. $Y = X^2$:

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(X^2 \le t) \overset{t \ge 0}{=}$$

$$P(|X| \le \sqrt{t}) = P(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) =$$

$$= \underbrace{P(-\sqrt{t} \le X \le 0)}_{=0\ (*)} + P(0 \le X \le \sqrt{t}) =$$

$$= F_X(\sqrt{t}) = \int_0^{\sqrt{t}} 2x e^{-x^2}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\, dx \\ x = 0 \to u = 0 \\ x = \sqrt{t} \to u = t \end{array} \right| = \int_0^t e^{-u} \cdot du = \left[-e^{-u}\right]_0^t =$$

$$= \underline{\underline{1 - e^{-t}}}$$

Tedy $F_Y(t) = 1 - e^{-t}$, odkud pro hustotu

$$f_Y(t) = (1 - e^{-t})' = e^{-t}. \quad \text{Pro } t \ge 0$$

$$f_Y(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0.$$

Příklad

Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, r\rangle$. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti rozdělení objemu koule o poloměru X.

$X \sim Rs(0,r)$, $\quad f_X(t) = \frac{1}{r}$ pro $t \in (0,r)$

$\qquad\qquad\qquad\quad = 0$ jinak

$$\underline{F_X(t)} = \int_0^t \frac{1}{r}\,dx = \underline{\frac{t}{r}}. = P(X \le t) \quad t \in (0,r)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi X^3 : \; F_V(d) = P(V \le d) = P\left(\frac{4}{3}\pi X^3 \le d\right) = P\left(X \le \sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}\right) = \frac{1}{r}\cdot\sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}, \quad \text{pro } 0 \le d \le \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dále $F_V(d) = 0$ pro $d < 0$,

$\qquad F_V(d) = 1$ pro $d > \frac{4}{3}\pi r^3$

Hustota $f_V(d) = 0$ pro $d \notin (0, \frac{4}{3}\pi r^3)$;

$$f_V(d) = \left[F_V(d)\right]' = \left(\frac{1}{r}\cdot\sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}\right)' = \underline{\frac{1}{r}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\cdot\frac{1}{3}d^{-\frac{2}{3}}}$$

Obecný princip limitních vět:

X_n $\quad E(X_n)$ ... stř. hodnota

$\quad D(X_n)$ ... rozptyl

$$\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{D(X_n)}}$$ má $E = 0$, $D = 1$

a „většinou“ se blíží k $N(0,1)$.

Příklad

Hodíme kostkou celkem 12 000 krát. Určete pravděpodobnost toho, že počet hozených šestek je mezi 1 800 a 2 100.

$X \sim Bi\left(12000; \frac{1}{6}\right)$

$$P(1800 \leq X \leq 2100) = \sum_{k=1800}^{2100} \binom{12\,000}{k} \frac{1}{6^k} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k}$$

Moivre-Laplace:

$EX = n \cdot p = 2000$

$DX = np(1-p) = 12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$

$$P(1800 \leq X \leq 2100) = P\left(\frac{1800-2000}{\sqrt{\frac{10000}{6}}} \leq \underbrace{\frac{X-2000}{\sqrt{\frac{10000}{6}}}}_{\sim N(0,1)} \leq \underbrace{\frac{2100-2000}{\sqrt{\frac{10000}{6}}}}_{=\sqrt{6}}\right) \approx \underbrace{\Phi(\underbrace{\sqrt{6}}_{2{,}45}) - \Phi(\underbrace{-2\sqrt{6}}_{-4{,}9})}_{0{,}99286}$$

$\Phi(-4{,}9) \doteq 0$

Φ lze najít v tabulkách nebo v SW

Příklad

Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi tisíci novorozenci bude alespoň tolik děvčat jako chlapců?

X ... počet chlapců na 1000 porodů

$$X \sim Bi(1000;\ 0{,}515)$$

$$1000 - X \geq X$$

$$X \leq 500$$

normujeme

$$P(X \leq 500) = P\left(\frac{X - n\cdot p}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\doteq \Phi\left(\frac{500 - 515}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485}}\right) = \ldots$$

12 1-13:23

Nezávisle opakujeme pokus s výsledky 1 a 0, které mají **neznámé** pravděpodobnosti p a $1-p$. Parametr p chceme odhadnout pomocí *relativních četností* X_n/n (X_n je počet jedniček při n pokusech). Víme, že je $X_n \sim \mathrm{Bi}(n,p)$, proto nám Moivre-Laplaceova věta umožní určit počet pokusů n potřebný k zajištění požadované přesnosti odhadu δ se spolehlivostí $1-\beta$.

$X_n \sim Bi(n, p)$

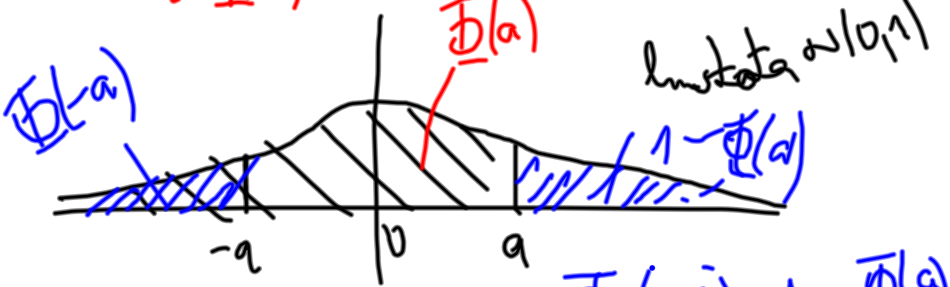
$$P\Big(-\delta < \frac{X_n}{n} - \underbrace{p}_{\text{neznámé}} < \delta\Big) \geq 1-\beta$$

M-L:

$$P\left(\frac{-\delta n}{\sqrt{\ldots}} < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\delta n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= \Phi\Big(\underbrace{\frac{\delta n}{\sqrt{\ldots}}}_{a}\Big) - \Phi\Big(\underbrace{\frac{-\delta n}{\sqrt{\ldots}}}_{-a}\Big)$$

$$\Phi(a) - \underbrace{\Phi(-a)}_{1-\Phi(a)} = 2\Phi(a) - 1$$



$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

kvantil $u_{0,95}$ je takové číslo, že

$$\Phi(u_{0,95}) = 0{,}05$$

$$\Phi(u_\alpha) = \alpha \iff u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha).$$

$p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ např. „pomocí dif. počtu"

Náhodně vybraná konzerva v armádním skladu je vadná s pravděpodobností 0,1. Kolik konzerv musí zásobovací důstojník ze skladu vzít, aby mezi nimi bylo s pravděpodobností 99% alespoň 60 bezvadných konzerv. (Předpokládejte, že konzervy jsou vydávány náhodně).

$X_n \sim Bi(n; 0{,}9)$

$? \, n \quad P(X_n \geq 60) = 0{,}99$

$0{,}99 = P(X_n \geq 60) \iff P(X_n < 60) = 0{,}01$

$$\underbrace{P\left(\frac{X_n - 0{,}9 \cdot n}{0{,}3 \cdot \sqrt{n}} < \frac{60 - 0{,}9n}{0{,}3 \cdot \sqrt{n}}\right)}_{\Phi\left(\frac{60 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right)} = 0{,}01$$

$$\iff \frac{0{,}9n - 60}{0{,}3 \cdot \sqrt{n}} \doteq \Phi^{-1}(0{,}99) = 2{,}33$$

$n \doteq 73{,}27$