$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Dk: $D(X) = E\left((X - EX)^2\right) =$

$= E\left(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2\right) =$

$= E(X^2) - E(2X \cdot EX) + E\left((EX)^2\right) =$

$= E(X^2) - 2EX \cdot \cancel{EX} + (EX)^2$

$= E(X^2) - (EX)^2.$

$E(X) = \mu$

$D(X) = \sigma^2$

$E(X - EX) = EX - \mu = \mu - \mu = 0$

$$D\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{DX}}\right)^2 \cdot D(X - EX) =$$

$$= \frac{1}{DX} \cdot D(X) = 1$$

12 8-12:28

Příklad

Náhodná veličina X je dána pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } x = -2 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}
\qquad
\begin{array}{cc} 2x+5 & x^2 \\ 1 & 4 \\ 11 & 9 \\ 7 & 1 \end{array}$$

Určete $E(X), E(2X+5), E(X^2), D(X)$ a $D(2X+1)$.

$$EX = \frac{1}{3}\cdot(-2) + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 1 = 1$$

$$E(2X+5) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 11 + \frac{1}{6}\cdot 7 = \frac{2+33+7}{6} = 7$$

Jinak: $E(2x+5) = 2EX + 5 = 2\cdot 1 + 5 = 7$

$$E(X^2) = \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 9 + \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{8+27+1}{6} = 6$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 1^2 = 5$$

$$D(2X+1) = 4DX = 20$$

Příklad

Nekorelované náhodné veličiny X a Y mají rozptyly $D(X) = a$ a $D(Y) = 2$. Určete konstantu a, jestliže rozptyl náhodné veličiny $Z = 3Y - X$ je $D(Z) = 25$.

$$\underset{25}{\underset{\parallel}{D(Z)}} = D(3Y - X) = D(3Y) + D(-X) + 2C(3Y, -X),$$

přitom $C(3Y, -X) = 3 \cdot (-1) \cdot C(Y, X) = -3 \cdot C(X, Y) = 0,$

tedy $25 = D(3Y) + D(-X) = 9D(Y) + 1 \cdot D(X) = 9 \cdot 2 + a$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = 7}}$$

12 8-11:51

Příklad

Buďte A a X nezávislé náhodné veličiny, splňující $X \sim N(0,1)$ a $P(A=1) = P(A=-1) = 1/2$. Položíme-li $Y = AX$, pak

$$P(Y<y) = \frac{1}{2}P(X<y) + \frac{1}{2}\underbrace{P(-X<y)}_{\Phi(y)} = \Phi(y),$$

$x > -y$

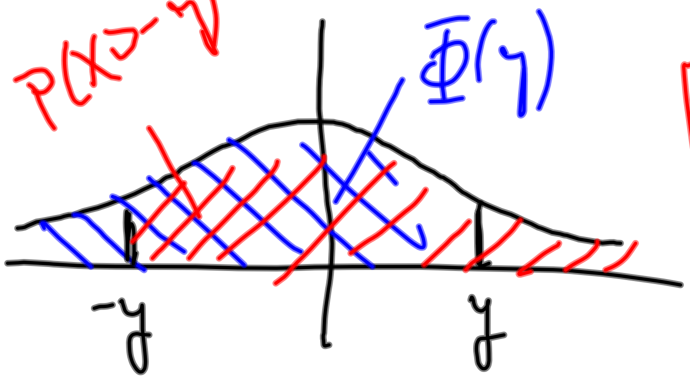
proto má rovněž Y rozdělení $N(0,1)$.

Dále $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(AX^2) \overset{(*)}{=} E(A)E(X^2) = 0 \cdot 1 = 0$, přitom $P(X=Y) = P(X=-Y) = 1/2$ a X, Y zřejmě nejsou nezávislé.

X, Y nejsou nezávislé, např. $f_{X,Y}(0,1) \neq f_X(0) \cdot f_Y(1)$

$\sim P(X=0, Y=1)$

Φ ... distr. fce $N(0,1)$, tj. $\Phi(y) = P(X<y)$



$$\boxed{\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)}$$

(*)

A, X nezávislé $\Rightarrow A, X^2$ nezávislé

$E(A) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$

$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$\underset{1}{\shortparallel}$ $\quad \Rightarrow 1 \quad$ $\underset{0}{\shortparallel}$

Příklad

Nechť je $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$.

1. Odhadněte $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$.
2. Vypočtěte $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$, jestliže navíc víte, že $X \sim N(0, 1)$.

ad 2: $X \sim N(0,1)$

$$P(|X - EX| \geq 3 \cdot \sigma) = P(|X| \geq 3) =$$

$$= P(X \leq -3) + P(X \geq 3) =$$

$$= \underbrace{\Phi(-3)}_{1-\Phi(3)} + 1 - \Phi(3) = 2 - 2\Phi(3) \doteq 0{,}0027$$

12 8-13:07

náhodných veličin se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Pa

normované *náhodné veličiny*

$S'_n = \sum_{i=1} Y_i$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \Big(\underbrace{\sum Y_i}_{= S'_n} - n\mu\Big)$$

$E(S'_n) = n\mu$

platí $D(S'_n) = n \cdot \sigma^2$

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < t) = \Phi(t),$$

kde Φ je distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$.

normujeme:

$$\frac{S'_n - E(S'_n)}{\sqrt{D(S'_n)}} = \frac{S'_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$

12 8-13:20

$Z \sim N(0,1)$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \, dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \, dx}_{= -I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} x \, dx}_{I_1}$$

$I_1 - I_1 = 0$

$$\left| \begin{array}{l} t = \frac{x^2}{2} \\ dt = x\,dx \end{array} \right|$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[-e^{-t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

12 8-13:26