$$\sum (X_i-\mu)^2 = \sum (X_i - M)^2 + n(M-\mu)^2.$$

Proto je

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\Big(\sum(X_i-\mu)^2\Big) - \frac{n}{n-1}E(M-\mu)^2 =$$

$D(\sum X_i) = \sum D(X_i)$

$$= \frac{1}{n-1}\sum D(X_i) - \frac{n}{n-1}D(M) =$$

nezávislost!

$$= \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2.$$

$X_1, \dots, X_n$

$$L = \sum (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2\mu \cdot X_i + \mu^2) =$$

$$= \cancel{\sum X_i^2} - \cancel{2\mu \overbrace{\sum X_i}^{n \cdot M}} + \cancel{n \cdot \mu^2}$$

$$P = \sum (X_i - M)^2 + n(M-\mu)^2 =$$

$$= \cancel{\sum X_i^2} - \cancel{2M \underbrace{\sum X_i}_{n \cdot M}} + \cancel{n \cdot M^2} - \cancel{2nM\mu} + \cancel{\mu^2 \cdot n}$$

$+n \cdot M^2$

Příklad

V roce 1951 bylo rozsáhlým statistickým průzkumem zjištěno, že střední hodnota výšky desetiletých chlapců je 136,1 cm se směrodatnou odchylkou $\sigma = 6{,}4$ cm.
V roce 1961 byla zjištěna výška pouze u 15 náhodně vybraných chlapců:

Náh. výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

130	140	136	141	139	133	149	151
139	136	138	142	127	139	147	

$\mu = ?$

Otázkou je, zda se v porovnání s rokem 1951 změnila střední výšk chlapců, pokud předpokládáme, že variabilita výšek se v různých generacích příliš nemění. tj. $\sigma = 6{,}4$

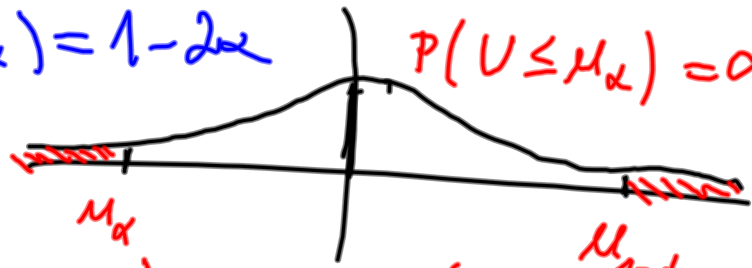
$$M \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \sigma = 6,4 \quad n = 15 \quad M = 139,133$$

$$U = \frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(u_{0,025} \le U \le u_{0,975}\right) = 0,95$$

$$P\left(u_{\alpha} \le U \le u_{1-\alpha}\right) = 1-2\alpha$$

$$P\left(U \le u_{\alpha}\right) = \alpha$$



$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \qquad P\left(U \ge u_{1-\alpha}\right) = \alpha$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$P\left(\left|\frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(|M-\mu| \le u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(M - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le M + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Příklad

Předpokládejme, že velká skupina studentů má ze zápočtové písemky ze statistiky bodové hodnoty normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Určete pravděpodobnost, že

a) náhodně vybraný student bude mít výsledek lepší než 80 bod

b) průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude lepší ne 80 bodů.

a) $X \sim N(72, 9^2)$

$P(X > 80) = 1 - P(X \leq 80) =$

zel. tabulka $= 1 - 0{,}81297 \doteq \underline{0{,}19}$

Jinak (transformací):

$U = \frac{X-72}{9} \sim N(0,1)$

$P(X > 80) = P\left(\frac{X-72}{9} > \frac{80-72}{9}\right) =$

$= P(U > \frac{8}{9}) = 1 - \Phi(\frac{8}{9})$

$\doteq 1 - 0{,}813 = \underline{0{,}187}$

b) $M \sim N(72, \frac{9^2}{10})$

$P(M > 80) = 1 - \Phi\left(\frac{82-72}{9/\sqrt{10}}\right) \doteq 1 - 0{,}9975$

$= 0{,}0025$

ZÁKLADNÍ TYPY ÚLOH

$$P(D \leq G \leq H) = 1 - \alpha$$

dolní mez — statistika — horní mez

1. je dáno G, α ; ? meze (symetricky)
   jednostranná mez

2. je G, D, H ; zajímá nás α
3. dáno α, D, H ; zajímá nás „informace o G"
   např. počet měření n nutný pro dosažení požadované přesnosti

12 15-12:54