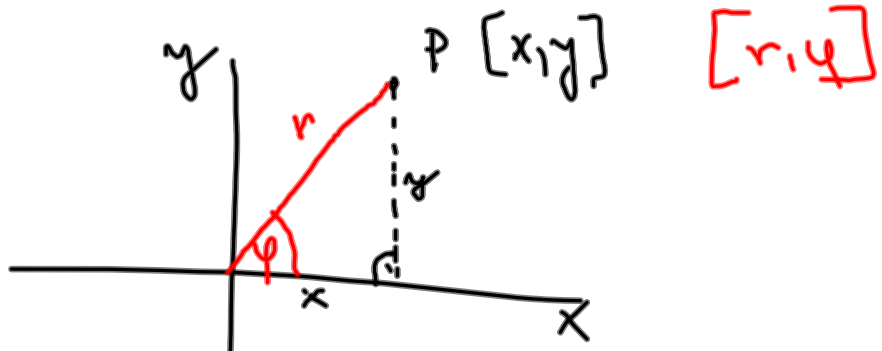


P ⇒ K:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \sin\varphi$$

Zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$[r,\varphi] \mapsto [r\cos\varphi, r\sin\varphi]$$

Popisujeme ho jako např. (f,g), kde

$$f(r,\varphi) = r \cdot \cos\varphi, \quad g(r,\varphi) = r \cdot \sin\varphi$$

K ⇒ P: $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ pro } x \neq 0 \quad \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & x=0, y>0 \\ \frac{3\pi}{2} & x=0, y<0 \end{array}\right.$$

$x=0, y=0$ spec. př.

kružnice (jednotková)

K: $k = \{[x, y];\ x^2 + y^2 = 1\}$

P: $k = \{[r, \varphi];\ r = 1\}$

jednodušší!

9 22-12:12

Limita $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y = f(x)$ v bodě x_0

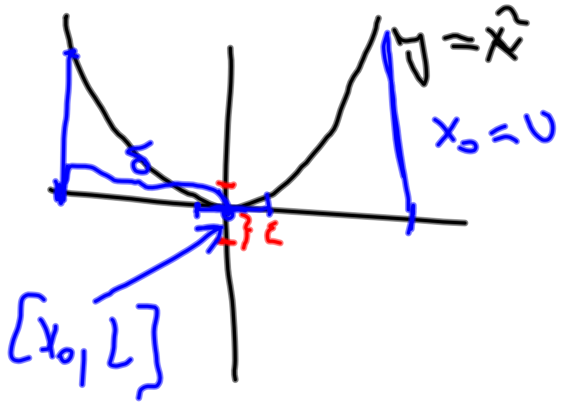
je rovna L $\left[\lim_{x \to x_0} f(x) = L \right]$

právě když

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$

$\forall x \ |x - x_0| < \delta :$

$|f(x) - L| < \varepsilon$



Pomocí tzv. okolí obecná def.

$\forall U_\varepsilon(L) \ \exists U^*_\delta(x_0) : \forall x \in U^*_\delta(x_0) :$

[* bez x_0]

$f(x) \in U_\varepsilon(L)$

9 22-12:22

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bodě $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0 \qquad g(x,y) = \sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$$

$$|g(x,y)| \le 1 \quad x\neq 0,\ y\neq 0$$

je ohraničená!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\cdot g(x,y) = 0 \quad (\text{podle věty})$$

9 22-12:44

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0,0)$.

Nejprve se „blížíme" podél osy x, tj. $y=0$:

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x\cdot0}{x^2}\right)=$$

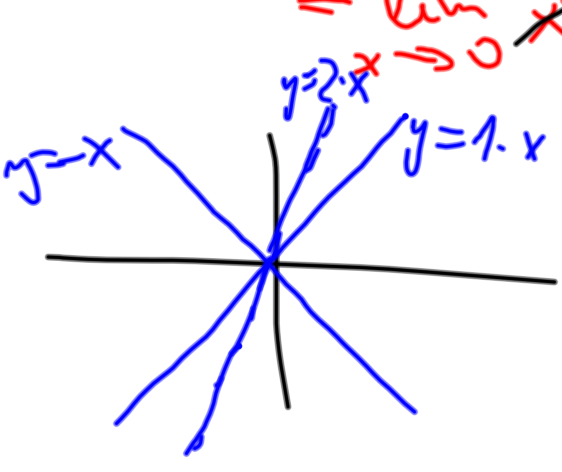
$$=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to0}0=0.$$

Analogicky $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0.$

Zkusme se „blížit" po libovolných přímkách $y=k\cdot x$ (pozor na obecný případ):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot k\cdot x}{x^2+(k\cdot x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{k\cdot\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+k^2)}=\boxed{\frac{k}{1+k^2}}$$



LIM neexistuje, protože výsledek závisí na hodnotě k.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,

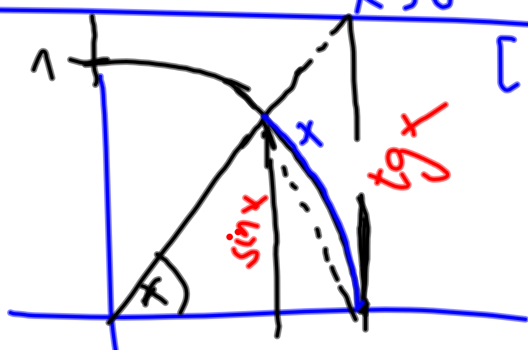
c) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.

a) s využitím $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x\cdot y}\cdot y = \underbrace{\lim \frac{\sin xy}{xy}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim y}_{=0} = 0$$

Připomenutí odvození $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:



[pro x ~~vad~~]

z obsahů plyne:

$\sin x < x < \operatorname{tg} x$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$

$\frac{1}{\cos x}$

Sjrvečte pol. 1 ilder x: $\frac{1}{2}x$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)} = \left| \begin{array}{l} \text{pol. souřadnice} \\ x = r\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \end{array} \right|$

$r\to\infty \quad \varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$= \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varphi\in(0,\frac{\pi}{2})}} r^2\cdot e^{-(r\cos\varphi + r\sin\varphi)} = \lim \frac{r^2}{e^{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}} \quad (*)$$

Přitom pro $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$ je

$$1 \leq \cos\varphi + \sin\varphi \leq \sqrt{2}$$

- buď pomocí dif. počtu: $-\sin\varphi + \cos\varphi = 0$

  $\varphi = \frac{\pi}{4}$

  $\Rightarrow$ extrémy buď ve stac. bodě nebo na kraji, v 0 a $\frac{\pi}{2}$

- $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$

  položíme $y = \frac{\pi}{4}$: $\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$

  $= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$

$$\Rightarrow \sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}\cdot\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{4})$$

$\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\quad$ $\sin x$ pro $x\in(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

má max. v $\frac{\pi}{2}$ a mini. v $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$1\cdot\sqrt{2}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2} = 1$

$$(*) = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{e^{r\cdot\text{omez.}}} = \underline{\underline{0}}$$

9 22-12:59

c) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, $= \lim \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{x}{x+y}}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$. $= \left| \text{pol. souř.} \right| = \frac{1}{\sin 2\varphi}$

$\Rightarrow$ LIM. NEEX.

$$\boxed{\lim_{w\to\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w} = e}$$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}\right]$$

$$= \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} e^{\frac{x}{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} e^{\frac{1}{1+\frac{y}{x}}} = e^{\frac{1}{1}}$$