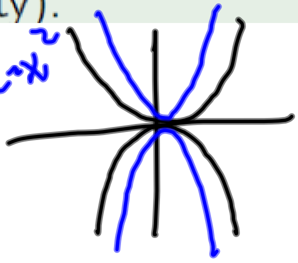
$$f(x,y)=\frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$$

mimo počátek a $\boxed{f(0,0)=0,}$ má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách" dostáváme různé limity).

i) f není spojitá v $[0,0]$

$y = k\cdot x^2$



$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4\cdot(k\cdot x^2)^2}{x^8+(k\cdot x^2)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2\cdot \cancel{x^8}}{\cancel{x^8}(1+k^4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^2}{1+k^4}=\frac{k^2}{1+k^2}$$ - závisí na k $\Rightarrow$ LIMITA NEEXISTUJE

$\Rightarrow f$ není spojitá

ii) směrové derivace v bodě $[0,0]$ ve směru $v=(v_1,v_2)$: pro $v\neq\vec{0}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cdot v_1,0+t\cdot v_2)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim \frac{1}{t}\big(f(tv_1,tv_2)-0\big)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{(tv_1)^4(tv_2)^2}{(tv_1)^8+(tv_2)^4}=\lim_{t\to 0}\frac{t^6v_1^4v_2^2}{t^5\left[t^4v_1^8+v_2^4\right]}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot v_1^4v_2^2}{t^4v_1^8+v_2^4}=\begin{cases}0 & \text{pro } v_2\neq 0\\ \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^4v_1^8}=0\end{cases}$$

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

$$f'_v(x) = f_v(x) = d_v f(x)$$

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[-1,1]$ ve směru vektoru $(1,2)$.

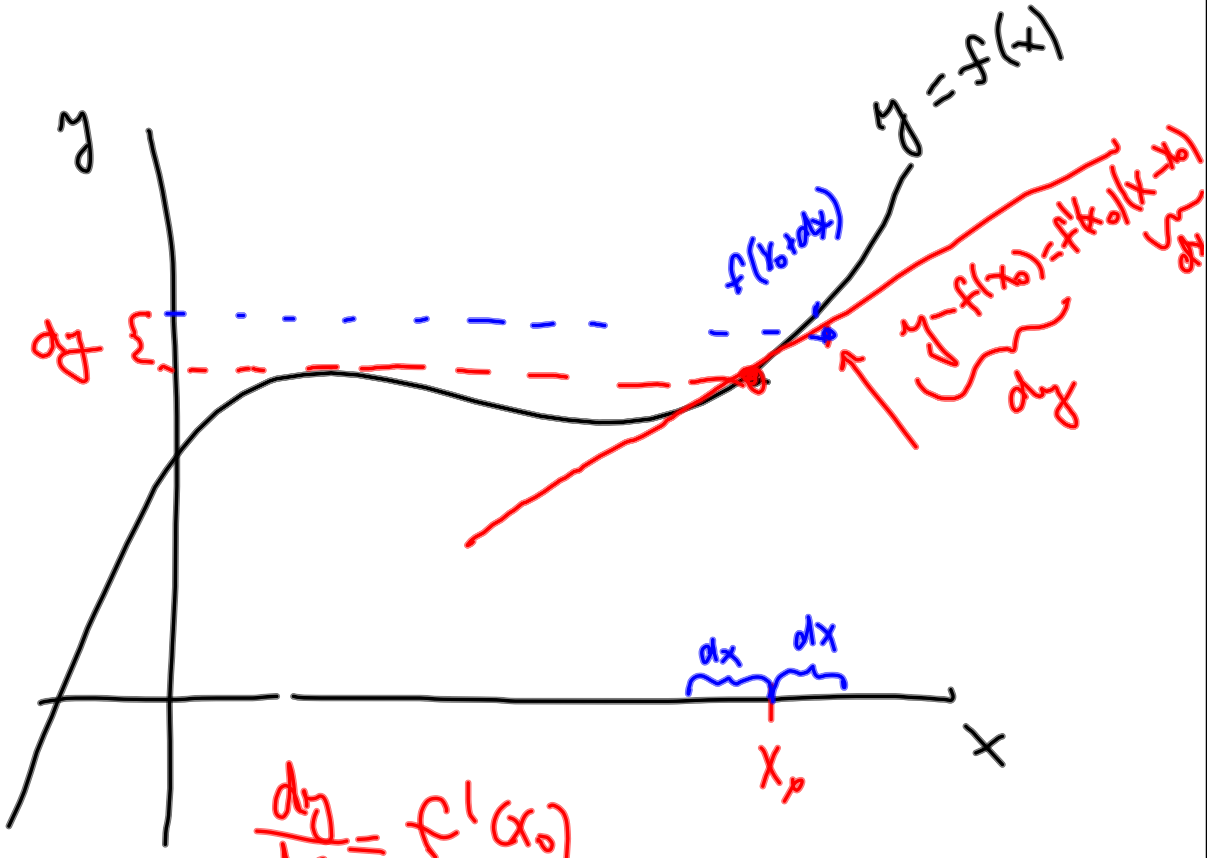
$$f'_{(1,2)}(-1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(-1+t\cdot 1,\ 1+t\cdot 2) - f(-1,1)\Big)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\operatorname{arctg}\big((-1+t)^2 + (1+2t)^2\big) - \operatorname{arctg} 2\Big)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\operatorname{arctg}(5t^2+2t+2) - \operatorname{arctg} 2\Big)$$

l'H

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+(5t^2+2t+2)^2}\cdot(10t+2)}{1} = \frac{2}{5}.$$



$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$$

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, \dots, x_n)$

$$\lim_{v \to (0, \dots, 0)} \frac{f(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) - f(x_1, \dots, x_n) - (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)}{\| v \|}$$

9 29-12:41

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne
$f(x+v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v \to 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.

chyba

Proto:

$$\lim_{v \to 0} \left(f(x+v) - f(x)\right) = \lim_{v \to 0} \left(a \cdot v + \tau(v)\right) = 0,$$

a tedy

$$\lim_{v \to 0} f(x+v) = f(x).$$

9 29-12:47

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál $\mathrm{d}f$ v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí $(*)$.

f je diferencovatelná (v bodě x)

$\Downarrow$

f má derivace ve všech směrech (v b. x)

$\Downarrow$

f má všechny parciální derivace (v b. x)

jsou-li $\underbrace{\text{spojité}}_{\text{parc. der.}}$ v okolí b. x

Příklad

Přímo z definice určete df a funkci τ pro $f(x,y) = x^2 + y^2$ v obecném bodě $[x^*, y^*]$.

Řešení

Kvůli přehlednosti označme $h := dx$, $k := dy$. Pak

$$f(x^* + dx, y^* + dy) - f(x^*, y^*) = a_1 \cdot h + a_2 \cdot k + \tau(h,k)$$

$$= (x^* + h)^2 + (y^* + k)^2 - (x^*)^2 - (y^*)^2 =$$

$$= 2x^* h + 2y^* k + h^2 + k^2.$$

Odtud $\boxed{df(x^*, y^*)(h,k) = 2x^* \cdot h + 2y^* \cdot k}$ a $\tau(h,k) = h^2 + k^2$.

$a = (2x^*, 2y^*)$ $\quad \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\tau(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim \sqrt{h^2+k^2} = 0$

z def. ↑

z vět: $f'_x(x,y) = 2x \quad f'_y(x,y) = 2y$

spojité v lib okolí lib. bodu $[x^*, y^*]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow df(x^*, y^*)(h,k) = (2x^*, 2y^*) \cdot (h,k) =$

$= 2x^* \cdot h + 2y^* \cdot k$

Příklad

Určete diferenciál v daném bodě:

a) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ v bodě $[1,1]$,

b) $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $[1,\sqrt{3}]$.

a) parc. derivace:

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y) &= y + \frac{1}{y} \\ f'_y(x,y) &= x - \frac{x}{y^2} \end{aligned}\right\}$$

parc. der. spojité v okolí $[1,1]$ $\Rightarrow$ ex. diferenciál v $[1,1]$

$$\Rightarrow df(1,1): (dx,dy) \longmapsto (f'_x(1,1), f'_y(1,1)) \cdot (dx,dy) = 2dx + 0 \cdot dy$$

b) $$f'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}x}{(x^2+y^2)} =$$

$\boxed{[1,\sqrt{3}]}$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \cdot \frac{\frac{x^2+y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$f'_x(1,\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$f'_y(x,y) = \ldots = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$f'_y(1,\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}$

Diferenciál f v $[1,\sqrt{3}]$ je: $(dx,dy) \mapsto \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot dx - \frac{1}{4} dy$

Příklad

Spočtěme znovu jednodušeji dřívější příklad a určeme směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ v bodě $[-1,1]$ ve směru vektoru $(1,2)$ pomocí diferenciálu.

parc. derivace:

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} \qquad f'_x(-1,1) = -\frac{2}{5}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} \qquad f'_y(-1,1) = \frac{2}{5}$$

$$df(-1,1):\ (dx,dy) \mapsto -\frac{2}{5}dx + \frac{2}{5}dy$$

směr. derivace ve směru $(1,2)$:

$$f'_{(1,2)}(-1,1) = -\frac{2}{5}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot 2 = \frac{2}{5}$$

9 29-11:59

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$, v bodě $[\frac{1}{2}, 1]$

b) $1{,}04^{2{,}02}$. diference $[-0{,}02; 0{,}05]$

a) $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$

$f'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$ $\quad f'_x(\frac{1}{2},1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} =$

$= -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$ $\quad f'_y(\frac{1}{2},1) = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$df(\frac{1}{2},1): (dx,dy) \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot dx - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot dy$

$df(\frac{1}{2},1): (-0{,}02; 0{,}05) \mapsto -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{100} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{100}$

$= -\frac{1}{100} \cdot \frac{9}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{100}$

$\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05} \doteq \arcsin \frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{3\sqrt{3}}{100} = \frac{\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{100}$

b) $1{,}04^{2{,}02} = ?$ $\quad [1,2]$ $\quad (dx,dy) = (0{,}04; 0{,}02)$

$f(x,y) = x^y$

$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$ $\quad f'_x(1,2) = 2$

$f'_y(x,y) = x^y \cdot \ln x$ $\quad f'_x(1,2) = 0$

$1{,}04^{2{,}02} \doteq 1^2 + 2 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 0{,}02 = \underline{\underline{1{,}08}}$