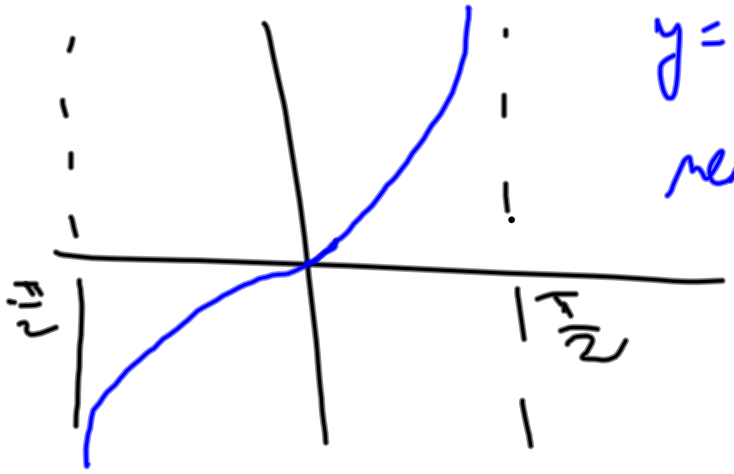
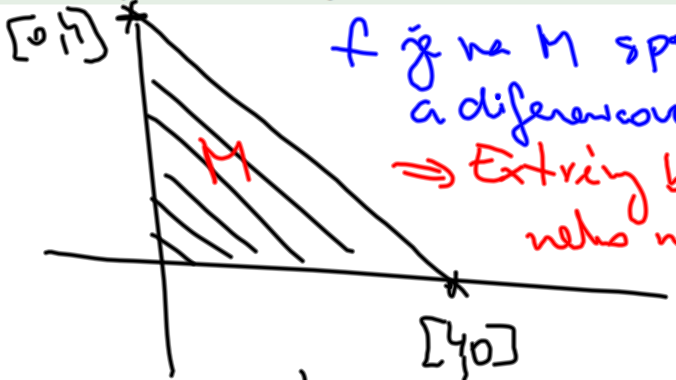


$y = \operatorname{tg} x$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

nemá extrémy

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.



f je na M spojitá a diferencovatelná $\forall x \in M$.

$\Rightarrow$ Extrémy budou ve stac. bodech nebo na hranici.

stac. body: $f'_x(x,y) = y - 2x + 1 = 0$

$f'_y(x,y) = x - 2y + 1 = 0$

Řešením je bod $[1,1]$.

Není třeba zjišťovat typ lokálního extrému (tedy Hessovu matici), stačí porovnat funkční hodnoty.

Prozkoumáme body na hranici:

1. $y=0$ $\quad f_0(x) = f(x,0) = -x^2 + x, \; x \in \langle 0,4 \rangle$

$f_0'(x) = -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$[\frac{1}{2},0]$, další body: $[0,0]$, $[4,0]$

2. $x=0$: $\quad f_1(y) = f(0,y) = -y^2 + y$

analogicky bod $[0,\frac{1}{2}]$, dále $[0,0]$, $[0,4]$

3. $x+y=4$ $\quad f(x,y) = -(x+y)^2 + 3xy + (x+y)$

$f_2(x) = -4^2 + 3x(4-x) + 4$

$= -3x^2 + 12x - 12 =$

$= -3(x^2 - 4x + 4) = -3(x-2)^2$

stac. bod $[2,2]$, dále $[0,4]$, $[4,0]$

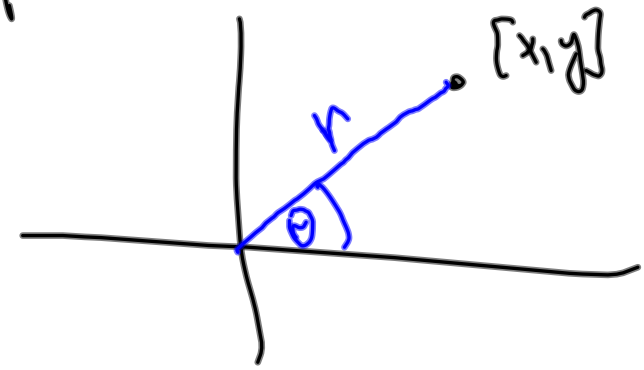
Podezřelé body: $\underset{1}{[1,1]}$, $\underset{1/4}{[0,\frac{1}{2}]}$, $\underset{1/4}{[\frac{1}{2},0]}$, $\underset{0}{[2,2]}$

$\underset{0}{[0,0]}$, $\underset{-12}{[0,4]}$, $\underset{-12}{[4,0]}$

abs. max.

min

polární $\longleftrightarrow$ kartézské



$x = r\cos\Theta$

$y = r\sin\Theta$

inverzní:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ pro $x \neq 0$

[$x=0$: $\Theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pro } y \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro } y < 0 \end{cases}$

$F: E_2 \to E_2 \quad [r, \Theta] \mapsto [r\cos\Theta, r\sin\Theta]$

Věta („Chain rule“, o derivaci složeného zobrazení)

Nechť $F : E_n \to E_m$ a $G : E_m \to E_r$ jsou dvě diferencovatelná zobrazení, přičemž definiční obor G obsahuje celý obor hodnot F. Pak také složené zobrazení $G \circ F$ je diferencovatelné a jeho diferenciál je v každém bodě z definičního oboru F kompozicí diferenciálů

$$D^1(\underbrace{G \circ F}_{\text{složení zobrazení}})(x) = \underbrace{D^1 G(F(x))}_{\text{„derivace“ vnější složky}} \circ D^1 F(\overbrace{x}^{\text{vnitřní složka}}).$$

Příslušná Jacobiho matice je dána součinem příslušných Jacobiho matic.

$g(r,\varphi,t) = \sin(r - t)$

F: kartézské → polární

$$D^1(g\circ F)(x) = \underbrace{D^1\big(g(F(x))\big)}_{\text{vnější}} \circ \underbrace{D^1F(x)}_{\text{vnitřní}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

$(\sqrt{x^2+y^2})'_x$

$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) = \cos(r-t)$, $\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2}-t)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} + 0\cdot\ldots$$

$$= \cos(\sqrt{x^2+y^2}-t)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$. podobně $\frac{\partial g}{\partial y}$

10 13-12:40

neformálně:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$dx = f'(y) \cdot dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} \Leftarrow \frac{dx}{dy} = f'(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Př:

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

$$dx = (e^y)' \cdot dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \Leftarrow dx = e^y \cdot dy$$

Př:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \quad \text{na } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \Leftarrow dx = \cos y \, dy$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

10 13-12:50

Rozhodněte, zda zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované po souřadnicích

$$f(x, y) = xy, g(x, y) = \frac{x}{y}$$

je prosté v okolí bodu $[2, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(2, 1)$.

Je-li prosté, zjistíme jako důsledek existence inverzního zobrazení, tj. pomocí Jacobiho matice

$$D^1F(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$D^1F(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det D^1F(2,1) = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ je invertibilní $\Rightarrow$ F je prosté v okolí $[2,1]$.

$$\text{Jac. mce } F^{-1}(2,2) = \left(D^1F(2,1)\right)^{-1} = \dots$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

[obecně $A \cdot A^* = \det A$ adjungovaná]

$$\dots = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Příklad

Spočítejte jacobián zobrazení F, které je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.

$$F(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$$

přímo komplikované, my snadněji přes inverzní zobrazení!

$G = F^{-1}$

$$G(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$$

$$D^1G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & +r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det D^1G(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

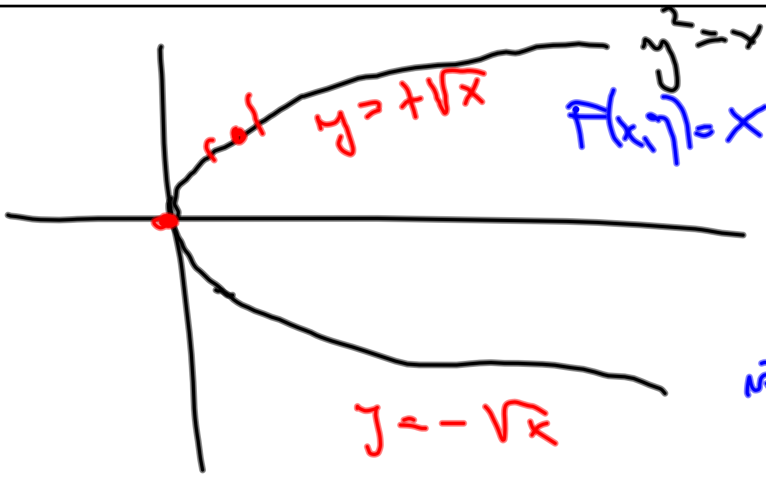
$$D^1F(x,y) = D^1G^{-1}(x,y) = \left[D^1G\right]^{-1} =$$

$$\Rightarrow \det D^1F(x,y) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Přímo: $$D^1F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) & \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$



$F(x,y) = x - y^2 = 0$

implicitně zadává $y = f(x)$ někde kromě $[0,0]$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = -\sqrt{x} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

JINAK A LÉPE:

$F(x,y) = 0$

zderivujeme, $y = y(x)$

$$1 - 2 \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{1}{2y}}}$$

$$F(x,y) = 0$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{dF} = F'_x + F'_y \cdot y'(x)$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

10 13-13:26

Příklad

Určete lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$, která je určena implicitně rovnicí $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz - 1 = 0$.

$z = f(x,y)$: hledáme stac. body:

(*) $2x + 2z \cdot z'_x - z - x \cdot z'_x - \sqrt{2}y \cdot z'_x = 0$

$2y + 2z\, z'_y - x \cdot z'_y - \sqrt{2} \cdot z - \sqrt{2} \cdot y \cdot z'_y = 0$

stac. body: $z'_x = 0$, $z'_y = 0$

$2x - z = 0 \Rightarrow z = 2x$

$2y - \sqrt{2}z = 0 \Rightarrow z = \sqrt{2}y \Rightarrow y = \sqrt{2}x$

Dosadíme: $x^2 + 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 - 4x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = \pm 1}}$

$[1, \sqrt{2}, 2]$, $[-1, -\sqrt{2}, -2]$

Druhé derivace: (*) derivujeme

$2 + 2 \cdot z'_x \cdot z'_x + 2z \cdot z''_{xx} - z'_x - z'_x - x \cdot z''_{xx} - \sqrt{2}y \cdot z''_{xx} = 0$

Ve stac. bodech ($z'_x = 0$):

$2 + 2z \cdot z''_{xx} - x \cdot z''_{xx} - \sqrt{2}y \cdot z''_{xx} = 0$

$$z''_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y} \qquad 2z - x - \sqrt{2}y \doteq F_z$$