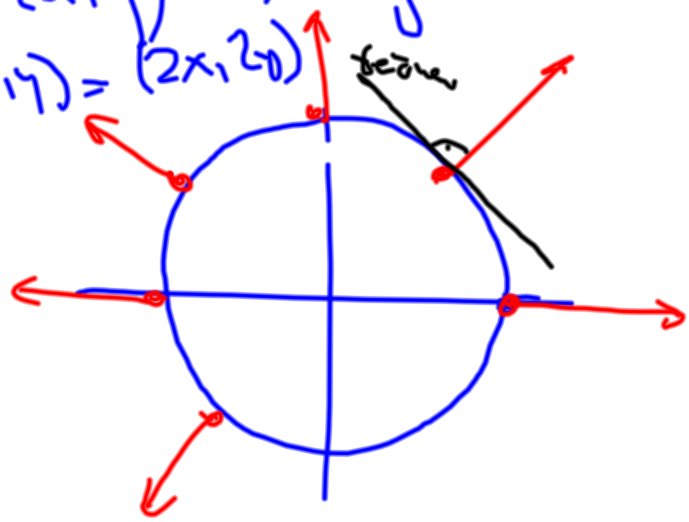
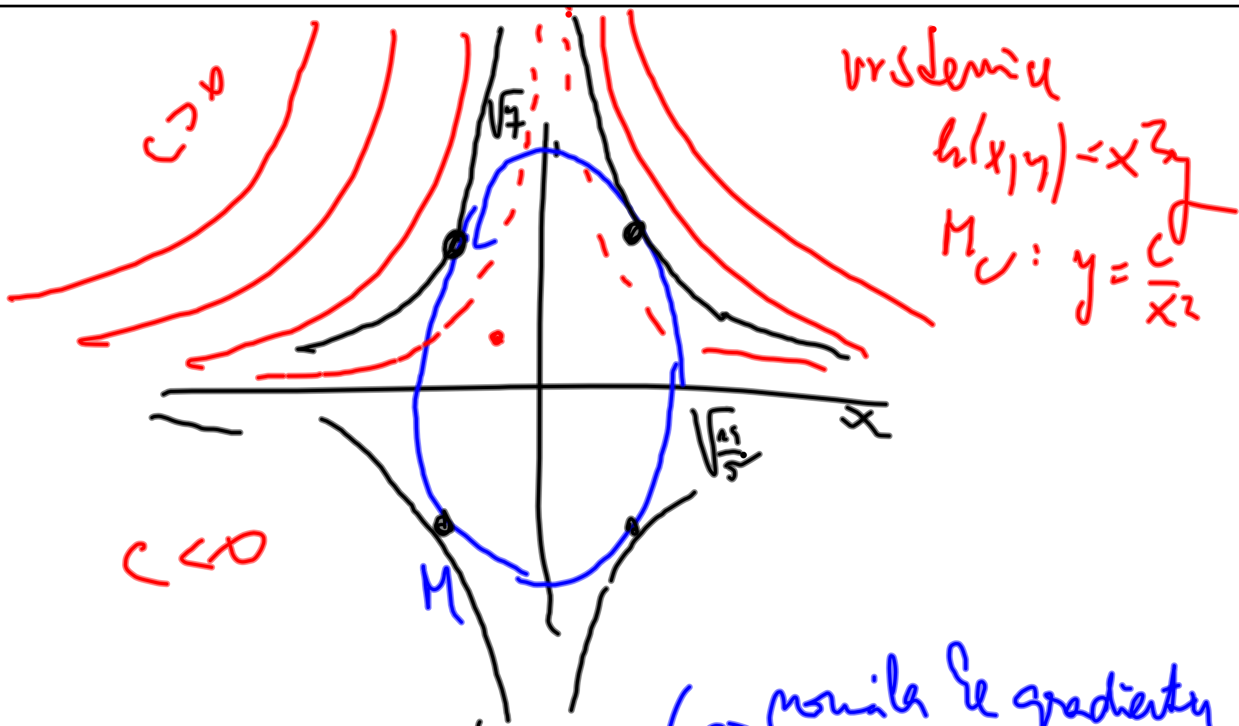
Pr. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$df(x,y) = (2x, 2y)$



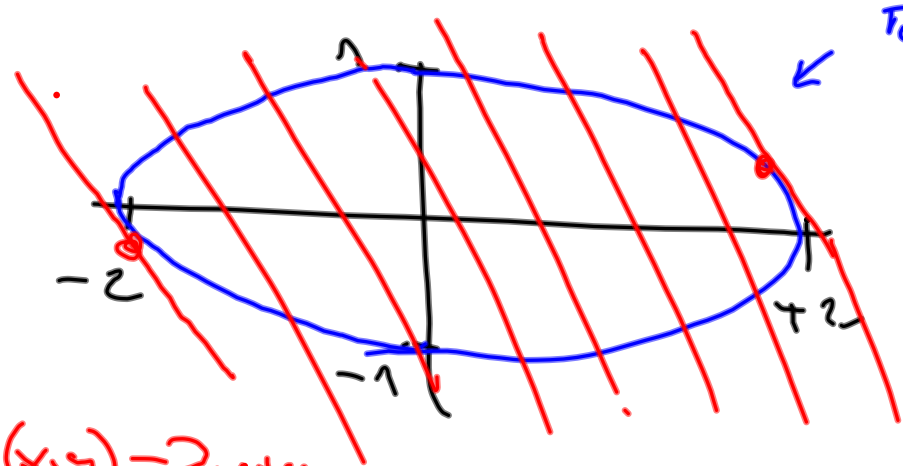
10 20-12:15



• extrémy $\left(\Leftrightarrow\right.$ normála ke gradientu $\in$ normálového prostoru k ploše$\left.\right)$

Příklad

Maximalizujte $f(x, y) = 2x + y$ za podmínky $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.



TOTO JE ELIPSA!

$f(x,y) = 2x + y$

$f(x,y) = c \Leftrightarrow y = c - 2x$

Příklad

Drát délky ℓ je rozdělen na 3 části. Z jedné části je vytvořen kruh, z druhé čtverec a ze třetí rovnostranný trojúhelník (vždy stočením, resp. složením vytvoříme obvod příslušného útvaru). Určete délky jednotlivých částí tak, aby celková plocha omezená těmito útvary byla **minimální**, resp. **maximální**.

$$2\pi x + 4y + 3z = \ell$$

x ... pol. kruhu

y ... strana čtverce

z ... strana trojúh.

$$f(x,y,z) = \pi x^2 + y^2 + z^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Lagr. fce: $F(x,y,z,\lambda) =$

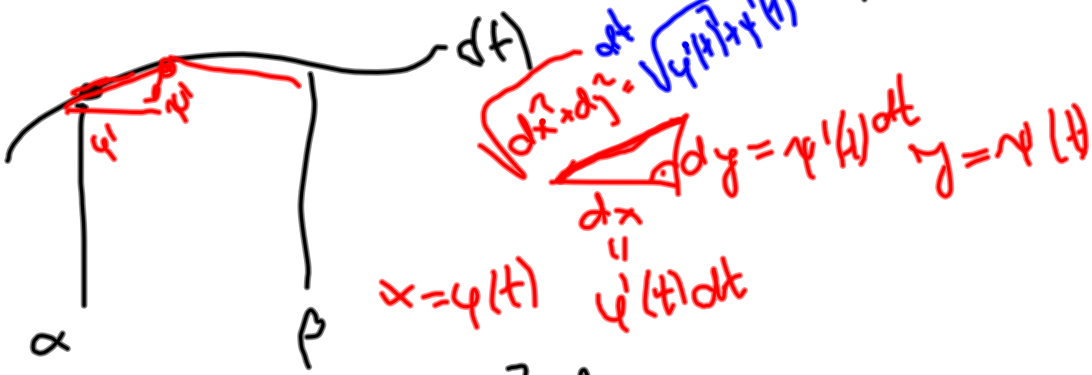
$$\pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot z^2 - \lambda\left(2\pi x + 4y + 3z - \ell\right)$$

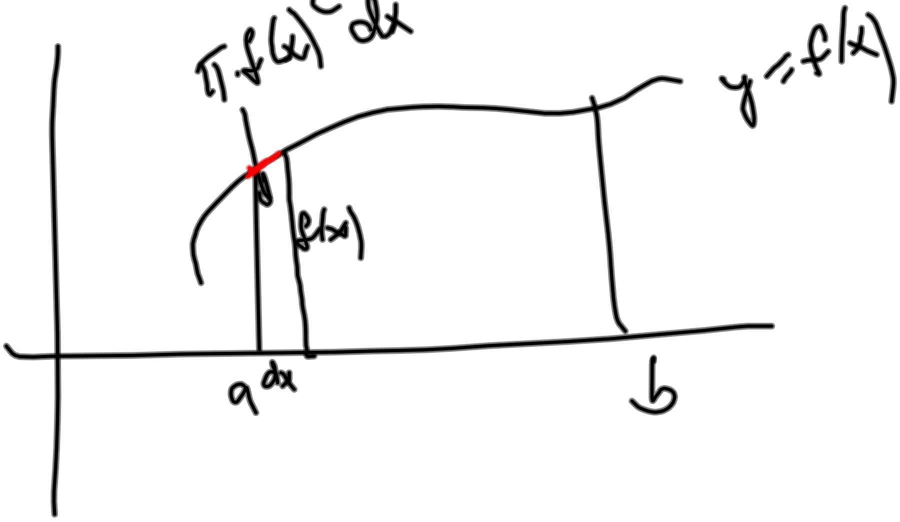
...

$$v = \sqrt{z^2 - \frac{z^2}{4}} = z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$,
- délka křivky zadané parametricky $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$,
- objem rotačního tělesa $\pi \int_a^b f^2(x)dx$,
- povrch pláště rotačního tělesa $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

$c(t) = [\varphi(t), \psi(t)] \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$



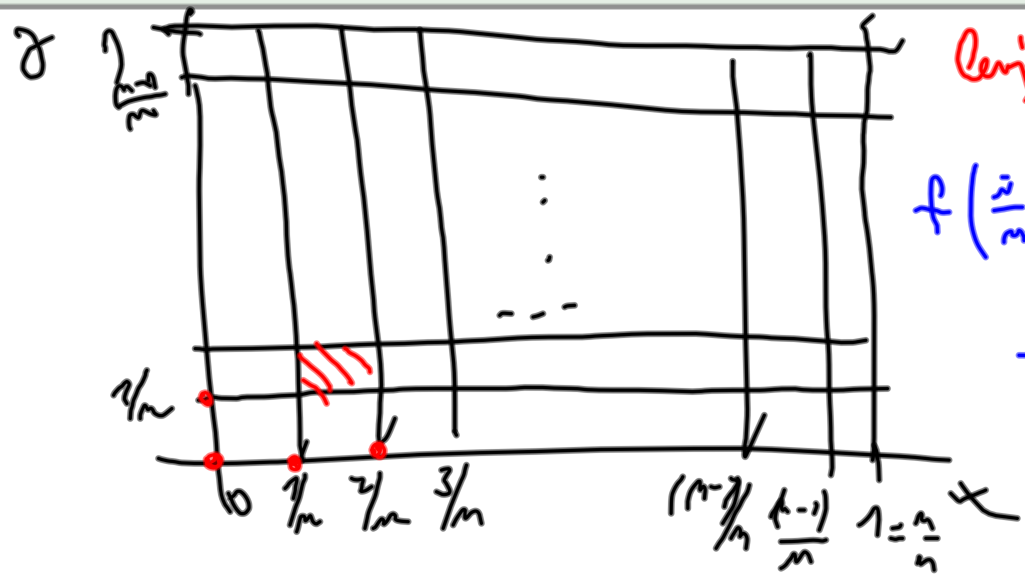


Příklad

Vypočtěte dvojný integrál

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy \; dxdy$$

jako limitu integrálního součtu.



levý dolní roh

$$f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{i \cdot j}{n^2}$$

$$0 = L_x = 2 - \lambda\frac{x}{2} \iff x = \frac{4}{\lambda}$$

$$0 = L_y = 1 - 2\lambda y \iff y = \frac{1}{2\lambda}$$

$$0 = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1.$$

$$\frac{\left(\frac{4}{\lambda}\right)^2}{4} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \quad / \cdot 4\lambda^2$$

$$16 + 1 = 4\lambda^2$$

$$\lambda^2 = \frac{17}{4}, \quad \underline{\underline{\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}}}$$

1. $\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad \frac{8}{\sqrt{14}} = x_1$

   $\frac{1}{\sqrt{17}} = y_1$

2. $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{2}, \quad x_1 = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

   $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{17}}$