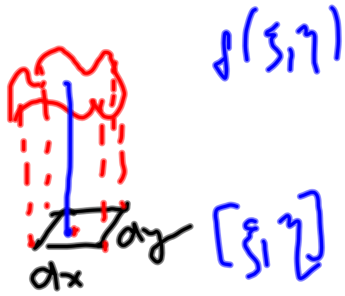
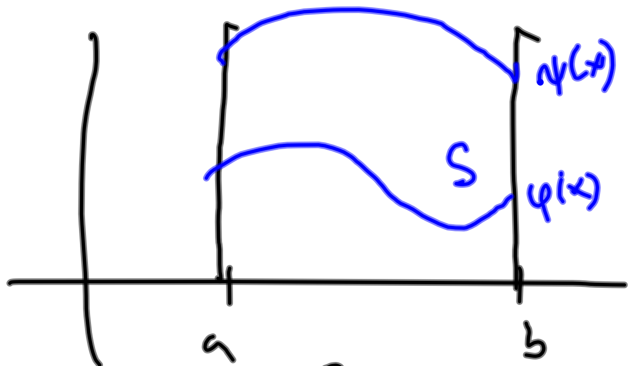


objem $\sim f(\xi,\eta)\cdot dx\cdot dy$



$x \in \langle a,b\rangle$

$y \in \langle \varphi(x),\psi(x)\rangle$

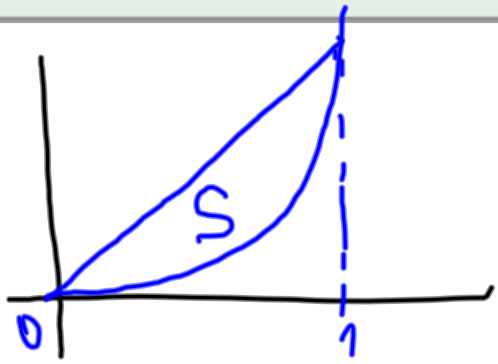
$$S = \{[x,y];\ x\in\langle a,b\rangle,\ y\in\langle\varphi(x),\psi(x)\rangle\}$$

Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2 \, dx \, dy,$$

kde S je plocha v 1. kvadrantu E_2 ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.



Snadno:

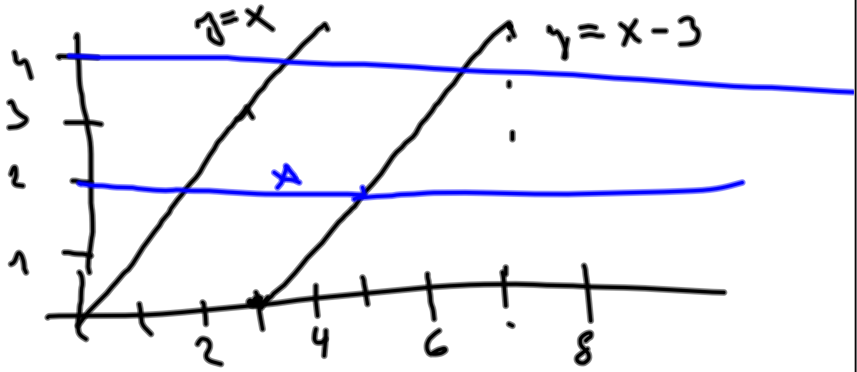
$x \in \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow x \geq x^2$

$S = \{ x \in \langle 0, 1 \rangle ; \ y \in \langle x^2, x \rangle \}$

příp. $S = \{ y \in \langle 0, 1 \rangle ; \ x \in \langle y, \sqrt{y} \rangle \}$

Příklad

Převeďte dvojný integrál $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}A$ na dvojnásobný (obě možnosti pořadí integrace) pro množinu A ohraničenou přímkami $y = x, y = x - 3, y = 2, y = 4$. Ověřte (přímo nebo s využitím SW např. `MAW`) rovnost výsledku pro konkrétní funkci $f(x,y) = y$.



I. $x \in \langle 2, 7 \rangle$: $2 \leq x \leq 4$: $y \in \langle 2, x \rangle$

$4 \leq x \leq 5$: $y \in \langle 2, 4 \rangle$

$5 \leq x \leq 7$: $y \in \langle x-3, 4 \rangle$

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_2^4 \int_2^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_4^5 \int_2^4 f(x,y)\,dy\,dx + \int_5^7 \int_{x-3}^4 f\,dy\,dx$$

II. (výhodnější) $2 \leq y \leq 4$: $x \in \langle y, y+3 \rangle$

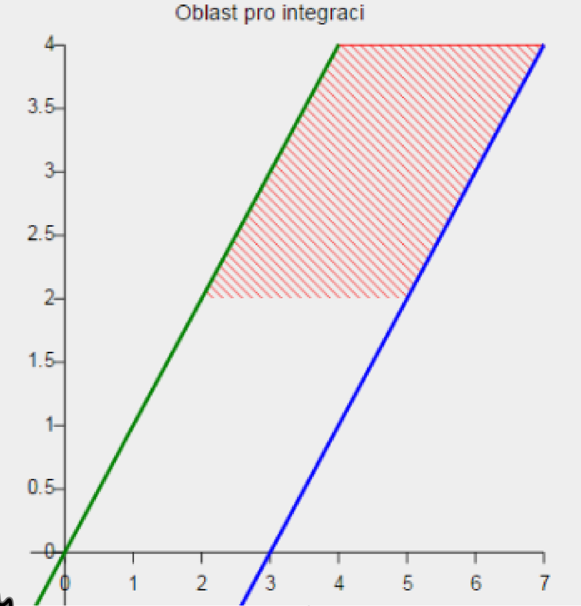
$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_2^4 \int_y^{y+3} f(x,y)\,dx\,dy$$

Integrujeme funkci y na množině zadané nerovnostmi $2 \le y \le 4$ a $y \le x \le y+3$.

$$I = \iint_M f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad f = y\,, \qquad M = \begin{cases} 2 \le y \le 4 \\ y \le x \le y+3 \end{cases}$$

$$I = \int_2^4 \int_y^{y+3} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_2^4 [x\,y]_y^{y+3}\,\mathrm{d}y \quad \text{(vnitřní integrace)}$$
$$= \int_2^4 (y+3)\,y - y\,y\,\mathrm{d}y \quad \text{(dosazení mezí)}$$
$$= \int_2^4 3\,y\,\mathrm{d}y \quad \text{(úprava)}$$
$$= \left[\frac{3\,y^2}{2}\right]_2^4 \quad \text{(integrace)}$$
$$= 24 - 6 \quad \text{(dosazení mezí)}$$
$$= 18 \quad \text{(úprava)}$$

Oblast pro integraci



Opačně: $\int_2^4 \int_2^x y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 [y^2]_2^x = \frac{1}{2}\int_2^4 x^2 - 4\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{56}{3} - 8\right) = \frac{28}{3} - 4 = \frac{16}{3}$

$\int_4^5 \int_2^4 y\,dy\,dx = \int_4^5 \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^4 dx = 6\int_4^5 dx = 6$

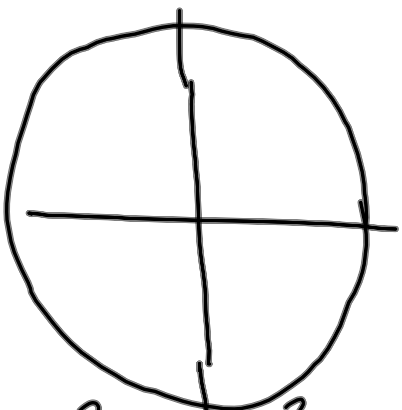
$\int_5^7 \int_{x-3}^4 y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_5^7 [y^2]_{x-3}^4\,dx = \frac{1}{2}\int_5^7 16 - (x-3)^2\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left([16x]_5^7 - \frac{1}{3}\left[(x-3)^3\right]_5^7\right) = \frac{1}{2}\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{20}{3}$

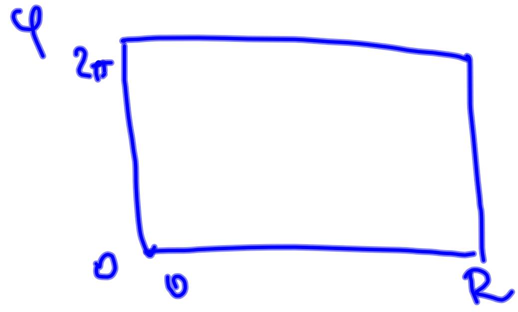
$16/3 + 6 + 20/3 = 18$

Změna souřadnic při integraci:

$$G: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$



$x^2+y^2 \le R^2$



$r \le R$

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2\leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad |Df| = r$$

$$x^2+y^2 \leq 1 \iff r^2 \leq 1 \iff 0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r)\cdot r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = 2\pi \cdot \int_0^1 f(r)\, r\, \mathrm{d}r$$

Jacobián transformace

Příklad

Vypočtěte integrál

$$\iint_A 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

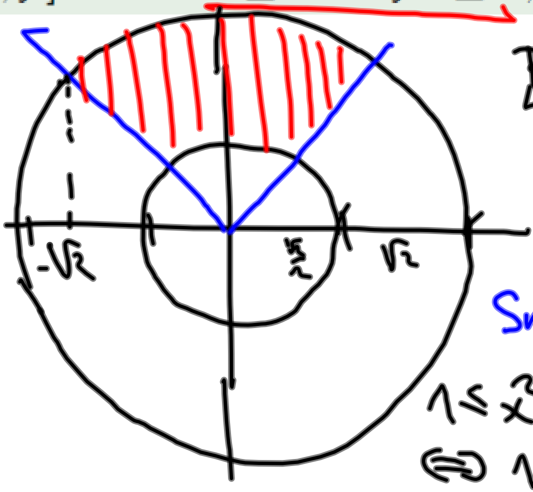
kde $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge |x|\}$.

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$x^2+y^2 = r^2$

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi$



Přímo: $-\sqrt{2} \le x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$-x \le y \le \sqrt{4-x^2}$

atd. komplikované

Snazší v pol. souřadnicích:

$1 \le x^2+y^2 \le 4 \iff 1 \le r^2 \le 4$

$\iff 1 \le r \le 2$

$y \ge |x| \iff r\sin\varphi \ge |r\cos\varphi| \iff$

$\iff \sin\varphi \ge |\cos\varphi| \quad |^2$

Nutně: $\sin\varphi \ge 0 \iff \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$

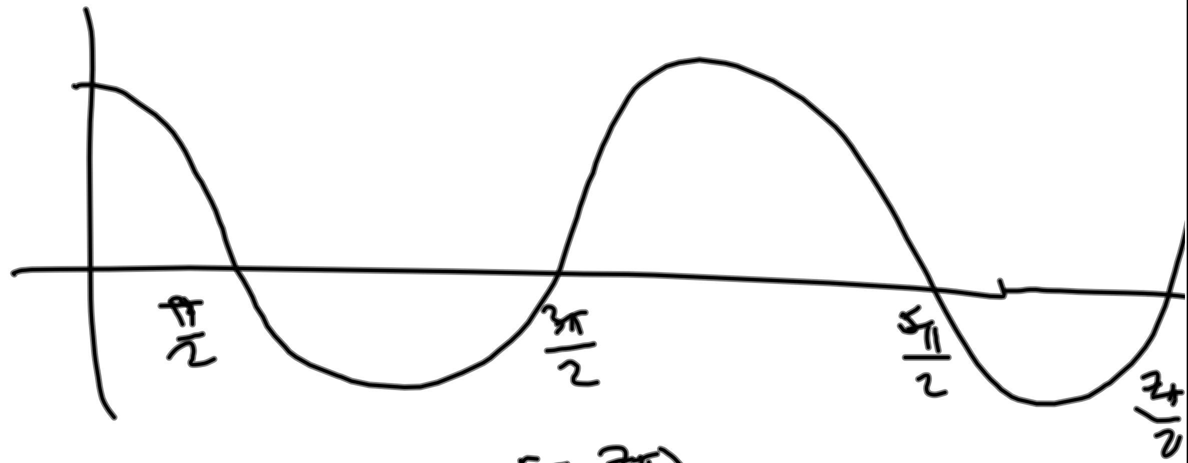
Pak $\sin^2\varphi \ge \cos^2\varphi \iff \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \le 0$

$\iff \cos 2\varphi \le 0 \iff 2\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$

$\iff \varphi \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \rangle$

Tedy: $\iint_A 2(x^2+y^2)\,dA = \int_1^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2r^2 \cdot r \, d\varphi\, dr =$

$= 2\int_1^2 r^3 [\varphi]_{\pi/4}^{3\pi/4}\, dr = \pi \int_1^2 r^3\, dr = \frac{\pi}{4}[r^4]_1^2 = 15\frac{\pi}{4}$



$$2\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right\rangle \cup \ldots$$

$$\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle \cup \ldots$$

$$\wedge\ \varphi \in \langle 0, \pi \rangle \Rightarrow \varphi \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle$$

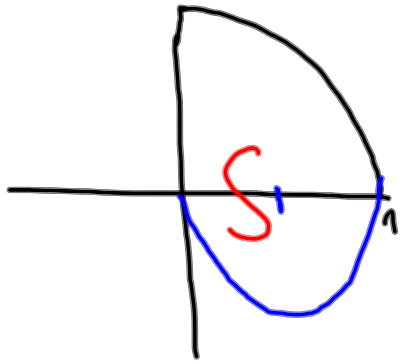
Příklad

Spočtěte integrál

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx.$$

$0 \le x \le 1$

$-\sqrt{x-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$



$y \ge 0$: $y \le \sqrt{1-x^2}$ $\quad |^2$

$x^2+y^2 \le 1$

$y<0$: $-\sqrt{x-x^2} \le y$ $\quad |^2$

$x-x^2 \ge y^2$

$x^2+y^2 \le x$

$(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+y^2 \le 0 \iff (x-\frac{1}{2})^2+y^2 \le \frac{1}{4}$

Úkol: spočítat obsah S:

1. bez integrace: $\frac{\pi\cdot 1^2}{4}+\frac{\pi\cdot(\frac{1}{2})^2}{2} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

2. polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$x \in \langle 0,1 \rangle$

$y \ge -\sqrt{x-x^2} \iff x^2+y^2 \le x \iff$ pro $y<0$ $[\pi \le \varphi \le 2\pi]$ $\iff r^2 \le r\cos\varphi \iff r \le \cos\varphi$

$y \le \sqrt{1-x^2} \underset{\text{pro } y\ge 0}{\iff} x^2+y^2 \le 1 \iff r^2 \le 1 \iff r \le 1$

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\int_0^{\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

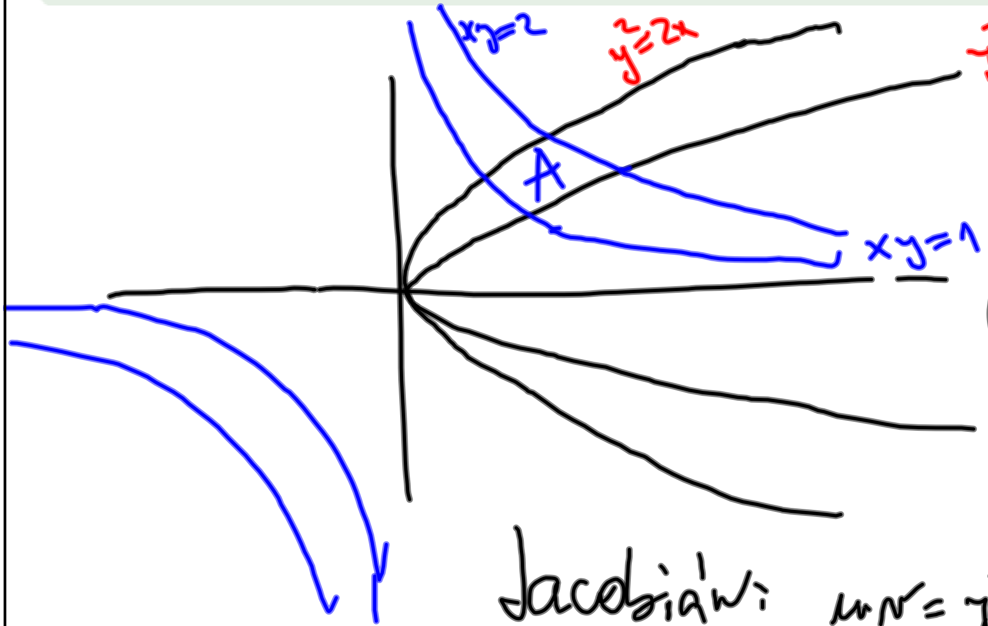
čtvrtkruh

viz MAW (:)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\cos(\varphi)} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\cos(\varphi)} \mathrm{d}\varphi \qquad \text{(vnitřní integrace)} \\
&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{2}\cos^2(\varphi) - \frac{1}{2}0^2 \,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{(dosazení mezí)} \\
&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos^2(\varphi)}{2} \,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{(úprava)} \\
&= \left[\frac{\sin(2\varphi)}{8} + \frac{\varphi}{4}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \qquad \text{(integrace)} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \qquad \text{(dosazení mezí)} \\
&= \frac{\pi}{8} \qquad \text{(úprava)}
\end{aligned}
$$

Příklad

Pomocí vhodné transformace souřadnic vypočtěte integrál $\iint_A \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde množina A je ohraničena křivkami $y^2 = 2x,\ y^2 = x,\ xy = 1,\ xy = 2.$



Nové proměnné:

$$u = x\cdot y$$
$$v = \frac{y^2}{x}$$

$$1 \le u \le 2$$
$$1 \le v \le 2$$

Jacobián: $uv = y^3, \ \frac{u^2}{v} = x^3$

Snadněji přes inverzní Jacobián:

$$DG = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y^2}{x} + \frac{y^2}{x} = 3\cdot\frac{y^2}{x} = 3v$$

$$\Rightarrow DF = \frac{1}{3v}$$

$$\iint_A \sqrt{xy}\,dx\,dy = \int_1^2 \int_1^2 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3v}\, du \cdot dv = \dots$$