měsíční úročení $\qquad r = 3\%$ p.a.

$$\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} \approx 1{,}0304$$

denní úročení

$$\left(1+\frac{r}{360}\right)^{360} \approx 1{,}03045$$

spojité úročení

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} = e^{r} \approx 1{,}03045$$

spojitý model $\quad y' = r\cdot y$

jejím řešením je $\quad y(t) = e^{r\cdot t}$

$y' = r \cdot y$ je homogenní

y_1, y_2 ... řešení, pak i $y_1 + y_2$, $k \cdot y_1$ je řešení

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$$
$$r \cdot (y_1 + y_2) = r \cdot y_1 + r \cdot y_2$$

$$(k \cdot y_1)' = k \cdot y_1' = k \cdot r \cdot y_1 = r \cdot (k \cdot y_1)$$

konstantní řešení: $y(t) \equiv k$:

$$y' = r \cdot y + s$$
$$0 = r \cdot k + s \iff k = -\frac{s}{r}$$

$\Rightarrow$ obecné řešení $y(t) = C \cdot e^{r \cdot t} - \frac{s}{r}$

11 3-12:16

$$y' = f(t) \cdot g(y)$$

$g(y) \neq 0$

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t) \cdot dt$$

integrujeme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\, dt$$

$$\parallel$$

$$G(y) = F(t) + C$$

... konstanta

Jako příklad najděme řešení rovnice

$$y' = x \cdot y.$$

$y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y \iff \frac{dy}{y} = x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \cdot dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \quad \Big| \, e^{L}, e^{P} \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{C} = K \qquad K \in \mathbb{R}^{+}$$

$$\underline{y = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}}} \quad \text{pro } K \in \mathbb{R} \text{ (včetně } K = 0\text{)}.$$

Příklad

Najděte obecné řešení rovnice $y - y^2 + xy' = 0$.

$xy' = y^2 - y$ $\qquad$ $y^2 - y \neq 0$

$x \cdot \frac{dy}{dx} = y^2 - y$

$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}$ $\qquad$ integrace! $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

$\int \frac{dy}{y^2 - y} = -\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1} =$

$= -\ln|y| + \ln|y-1| =$ $\qquad$ $\left[\frac{1}{y^2-y} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right]$

$= \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$

Celkem: $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln C$ $\qquad$ $\left(\begin{matrix} C \in \mathbb{R} \\ C > 0 \end{matrix}\right)$

$\left|\frac{y-1}{y}\right| = C \cdot |x|$ $\qquad$ $C \in \mathbb{R}$

$\frac{y-1}{y} = C \cdot x$

$1 - \frac{1}{y} = C \cdot x \iff \frac{1}{y} = 1 - C \cdot x$

$y = \frac{1}{1 - C \cdot x}$ $\qquad$ $C \in \mathbb{R}$

$y^2 - y = 0$: $x \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = 0 \wedge y = y^2$

sing. řešení $y \equiv 0$ nebo $y \equiv 1$ není sing. $(C = 0)$

Lin. dif. rce 1. řádu :

$$y' = a(t)\cdot y + b(t)$$

$$y' - a(t)\cdot y = b(t)$$

$$y'F(t) - a(t)\cdot F(t)y = b(t)F(t)$$

Integrační faktor $F(t)$
vynásobením I.f. dostaneme
na levé straně derivaci
součinu $y\cdot F$

$$[y\cdot F]' = y'\cdot F + y\cdot F'$$

Tj. musí platit $F'(t) = -a(t)\cdot F(t)$

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = -a(t)$$

$$\ln F(t) = \int -a(t)\,dt$$

$$F(t) = e^{\int -a(t)\,dt}$$

11 3-13:05

$$y' - a(t)\cdot y = b(t) \quad \Big|\cdot e^{\int -a(t)\,dt}$$

$$\underbrace{y' e^{\int -a(t)dt} - a(t)\cdot y \cdot e^{\int -a(t)dt}} = b(t)\cdot e^{\int -a(t)\,dt}$$

$$\left(y\cdot e^{\int -a(t)dt}\right)' = b(t)\cdot e^{\int -a(t)dt}$$

$$\Downarrow$$

$$y = e^{\int a(t)dt}\cdot\left(\int b(t)\cdot e^{\int -a(t)dt}\,dt + c\right)$$

Příklad

Rychlost, kterou se rozpadá konkrétní izotop daného prvku, je přímo úměrná množství izotopu. Poločas rozpadu izotopu Plutonia, ^{239}Pu, je 24 100 let. Za jak dlouho ubude setina z nukleární pumy, jejíž aktivní složkou je zmiňovaný izotop?

$$m = e^{-kt} \cdot m_0 \qquad m_0 = m(0)$$

Poločas rozpadu:

$2400 = t_r$

$$\frac{1}{2} \cancel{m_0} = e^{-k \cdot t_r} \cdot \cancel{m_0}$$

$$e^{-k \cdot t_r} = \frac{1}{2}$$

$$-k \cdot t_r = -\ln 2$$

$$k = \frac{\ln 2}{t_r} \qquad k \doteq 2{,}88 \cdot 10^{-5}$$

$$0{,}99 = e^{-k \cdot t} \Leftrightarrow -kt = \ln 0{,}99$$

$$t = -\frac{\ln 0{,}99}{k}$$

$$\underline{t \doteq 349{,}4}$$

11 3-13:15

Řešte rovnici

$$(x^2 - xy)y' + y^2 = 0.$$

$$(x^2 - xy) \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$\underbrace{(x^2 - xy)}_{F(x,y)} \cdot dy = \underbrace{-y^2}_{G(x,y)} \cdot dx$$

homogenní

$x \leftarrow t \cdot x$

$y \leftarrow t \cdot y$

$F(tx, ty) = t^2 \cdot F(x,y)$

$G(tx, ty) = t^2 \cdot G(x,y)$

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x} - 1}$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ kde } f(t) = \frac{t^2}{t-1}$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$z \cdot x = y$$

$$dz \cdot x + z \cdot dx = dy$$

$$(x^2 - xy) \cdot dy = -y^2 \cdot dx$$

$$(\cancel{x^2} - \cancel{x^2} z)(dz \cdot x + z \cdot dx) = -(z \cdot \cancel{x})^2 \cdot dx$$

$$(1 - z) \cdot (dz \cdot x + z\, dx) = -z^2\, dx$$

$$x\, dz + z\, dx = -\frac{z^2}{1-z}\, dx$$

$$x\, dz = \left(-z - \frac{z^2}{1-z}\right) dx$$

$$x\, dz = -\frac{z}{1-z}\, dx$$

$$\frac{1-z}{z}\, dz = -\frac{dx}{x} \quad \Big| \int$$

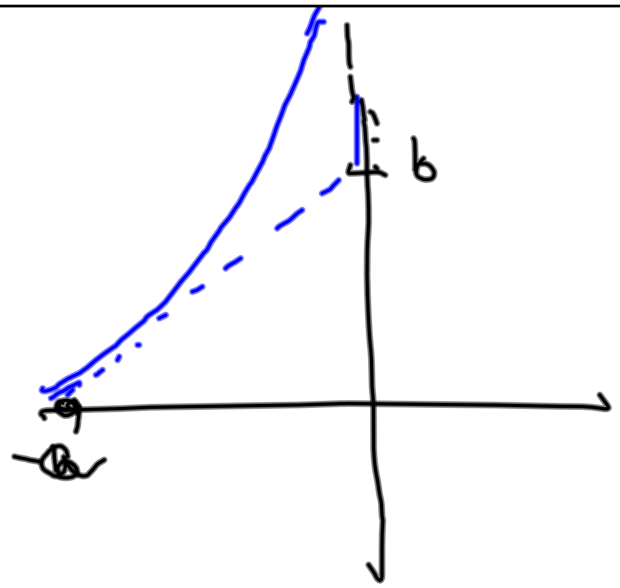
$$\int \left(\frac{1}{z} - 1\right) dz = \int -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| - z = -\ln|x| + \ln C$$

$$\frac{z}{e^z} = \frac{C}{x} \iff \frac{\frac{y}{\cancel{x}}}{e^{y/x}} = \frac{C}{\cancel{x}}$$

Řešení $y(x)$ je pouze implicitně $\iff \underline{\underline{y = C \cdot e^{\frac{y}{x}}}}$

11 3-13:28


b