Spočetná množina: npr. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

nespočetná: $\mathbb{R}$

$a_1 = 0, d_{11} d_{12} \ldots$

$a_2 = 0, d_{21} d_{22} \ldots$

d_{33}

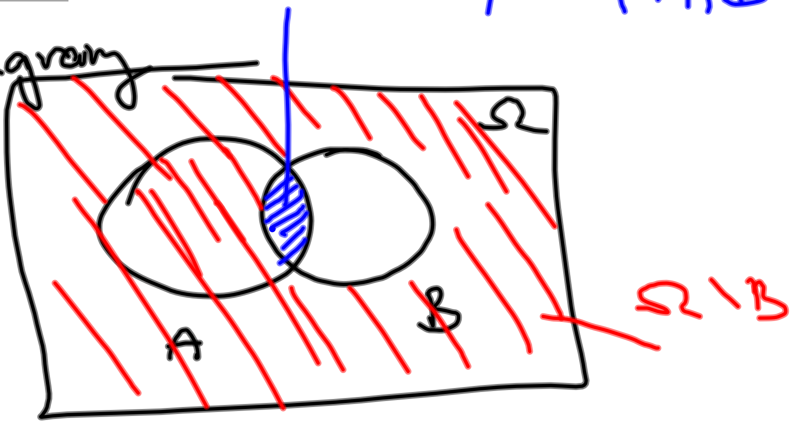
$a_3 = 0, \ldots$

$A^c = \underset{\text{jev}}{\Omega} \setminus \underset{\text{jev}}{A} \Rightarrow A^c$ je jev

$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$

např. - Vennovy diagram

$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B$



i) $P(\emptyset)=0$

$\Omega \cup \emptyset = \Omega \wedge \Omega, \emptyset$ neslučitelné

$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 1 = P(\Omega)}}{P(\Omega \cup \emptyset)} = \underset{\substack{\| \\ 1}}{P(\Omega)} + \underbrace{P(\emptyset)}_{=?} \Rightarrow P(\emptyset) = 1-1=0$

ii) $\Omega = A \cup A^c$ nesluč.

$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 1}}{P(\Omega)} = P(A) + \underbrace{P(A^c)}_{\geq 0} \Rightarrow P(A) \leq 1.$

$\Rightarrow P(A^c) = 1-P(A)$

$A \subseteq B$

iii) $B = A \cup (B \setminus A)$ neslučit.

$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(\underset{\geq 0}{B \setminus A}) \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

- Je-li $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, pak

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i),$$

(bez DK)

- Je-li $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, pak

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i),$$

$B_1 = A_1^c, \dots, B_i = A_i^c \Rightarrow B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$

$$\Longrightarrow P(\bigcup B_i) = \lim P(B_i) = \lim 1 - P(A_i) = $$
$$= 1 - \lim P(A_i),$$

průkon (de Morganovy zákony):

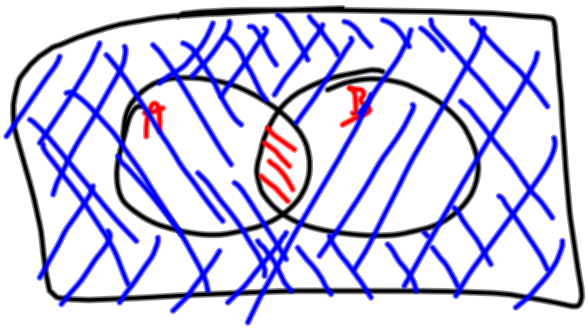
$$\bigcup B_i = \bigcup A_i^c = (\bigcap A_i)^c$$
$$P(\bigcup B_i) = P((\bigcap A_i)^c) = 1 - P(\bigcap A_i)$$

11 10-12:39

de Morgan:

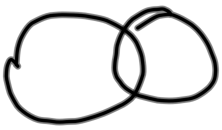
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$



11 10-12:41

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,



$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

weil $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$

$\leq P(A) + P(B)$

$A_1 \cup A_2 \cup \dots = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \dots$

$\Rightarrow P(A_1 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \dots$

$\leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

Příklad

6 boků

Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev A znamená, že padne liché číslo, jev B, padne-li prvočíslo.

a) Určete základní prostor Ω. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) Uveďte všechny možné výsledky příznivé nastoupení jevů A, B.

c) Pomocí A, B a operací s jevy vyjádřete: $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3,5\}$
- padne sudé číslo,
- padne číslo 2,
- padne číslo 2 nebo 3

d) Určete nejmenší jevové pole $(\Omega, \mathcal{A})$, obsahující jevy A i B.

c) $A^c = \Omega \setminus A = \{2,4,6\}$

$B \setminus A = \{2\}$

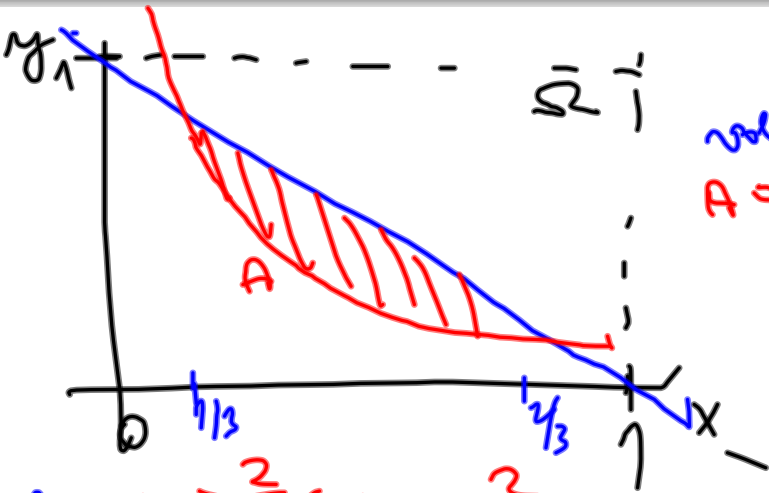
$\{2,3\}$ nelze pomocí A, B

d) $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, A, B, A^c, B^c, A \cap B = \{3,5\},$
$A \setminus B = \{1\}, B \setminus A = \{2\}, A^c \cup B^c, A \cup B,$
$\{4,6\}, \{1,2\}, \{1\}^c, \{2\}^c,$
$\{3,4,5,6\}\}$

$\{1,2,4,6\}$ $\{1,2,3,5\}$

Příklad

Jaká je pravděpodobnost, že dvě náhodně zvolená čísla z intervalu $(0, 1)$ budou mít součet menší než 1 a součin větší než $2/9$?



$\Omega = (0,1)\times(0,1)$

$\mathrm{vol}\,\Omega = 1$

$A = \{[x,y];\ 0 \le x,y \le 1,\ x+y<1,\ xy > \frac{2}{9}\}$

$x+y<1$, $xy > \frac{2}{9} \iff y > \frac{2}{9x}$

průsečíky: $y = 1-x \Rightarrow x(1-x) = \frac{2}{9}$

$$x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \quad \Big| \cdot 9$$

$$9x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$\frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{18} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$P(A) = \mathrm{vol}\,A = \int_{1/3}^{2/3} \int_{2/9x}^{1-x} dy\,dx = \int_{1/3}^{2/3} (1-x) - \frac{2}{9x}\,dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\ln x\right]_{1/3}^{2/3} =$$

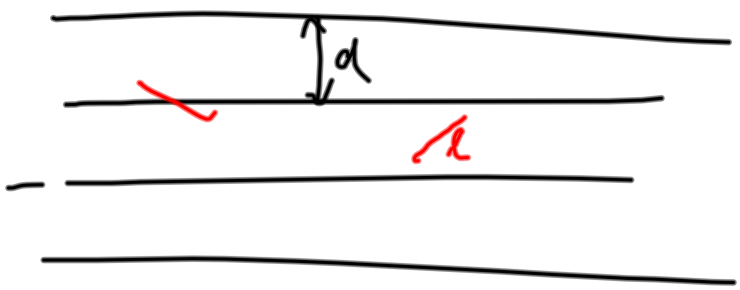
$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\ln\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \frac{2}{9}\ln\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{18} - \frac{2}{9}\ln 2 = \underline{\frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln 2}.$$

Příklad (Buffonova úloha)

Rovina je rozdělena rovnoběžkami umístěnými rovnoměrně ve vzdálenosti d. Do roviny je náhodně umístěna jehla délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku?

$l < d$



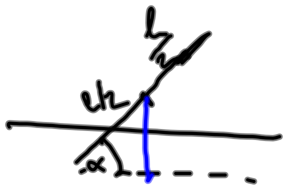
$$\Omega = \{[x,\alpha];\ 0 \leq x \leq \tfrac{d}{2},\ 0 \leq \alpha \leq \pi\}$$

x ... vzd. od nejbližší rovnoběžky

α ... úhel, který jehla svírá s rovnoběžkami

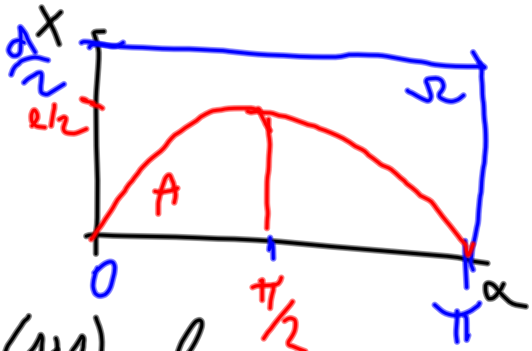
$$A = \{[x,\alpha];\ \text{„jehla protne rovnoběžku"}\}$$

protne $\iff \frac{l}{2}\cdot\sin\alpha > x$



$$= \{[x,\alpha];\ x < \tfrac{l}{2}\cdot\sin\alpha\}$$

$$P(A) = \frac{\operatorname{vol} A}{\operatorname{vol}\Omega}$$



$$\operatorname{vol} A = \int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{l}{2}\cdot\left[-\cos\alpha\right]_0^\pi = \frac{l}{2}(1+1) = \underline{\underline{l}}$$

$$P(A) = \frac{l}{\pi\cdot\frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi\cdot d}$$

např. pro $l := \frac{d}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{\pi}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

úplná pravděpodobnost:

$$B = (A\cap B) \overset{\text{nesl.}}{\cup} (A^c \cap B) =$$

$$= (A \cup A^c) \cap B = \Omega \cap B = B$$

$$P(B) = P(A\cap B) + P(A^c \cap B) =$$

$$= P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)\cdot P(A^c)$$

11 10-13:37

Příklad

a) Z urny, v níž je a bílých a b černých koulí, vybereme postupně (bez vracení) dvě koule. Jaká je pravděpodobnost. že druhá koule je bílá, za předpokladu, že první byla bílá.

b) Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Určete pravděpodobnost, že:

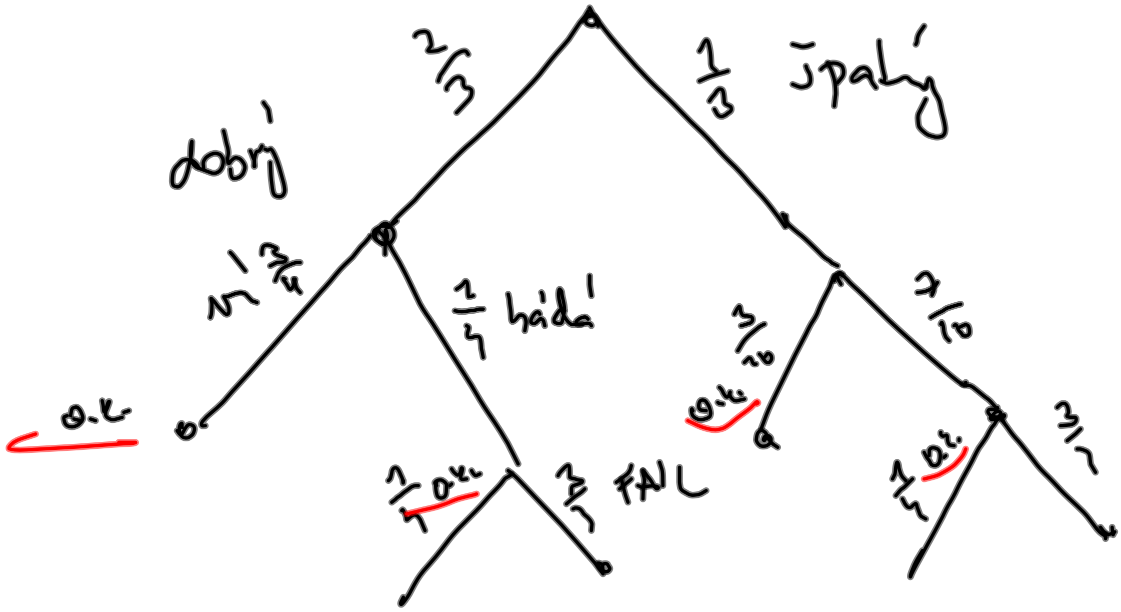
- třetí je zmetek za podmínky, že první 2 byly kvalitní.
- první 2 jsou kvalitní a třetí zmetek.

a) A... 1. koule bílá
B... 2. koule bílá

$P(B|A) = ?$ $\quad P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = ?$

snadněji přímo: $P(B|A) = \dfrac{a-1}{a-1+b}$

b) analogicky $\dfrac{10}{98}$



ad c)

$$\frac{\text{hádal}}{\text{správně}} \quad \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{7}$$