

# Matematika III – 2. týden

## Taylorův rozvoj, derivace složených zobrazení, věta o inverzi

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

22. – 26. září 2014

# Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Taylorova věta
  - Derivace a diferenciál (připomenutí)
  - Lokální extrémy funkcí více proměnných
- 3 Zobrazení mezi euklidovskými prostory
  - Zobrazení a transformace
  - „Chain Rule“
- 4 Věta o inverzním zobrazení

# Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Taylorova věta
  - Derivace a diferenciál (připomenutí)
  - Lokální extrémy funkcí více proměnných
- 3 Zobrazení mezi euklidovskými prostory
  - Zobrazení a transformace
  - „Chain Rule“
- 4 Věta o inverzním zobrazení

# Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice [www.math.muni.cz/Matematika\\_drsne\\_svizne](http://www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne)

# Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Taylorova věta
  - Derivace a diferenciál (připomenutí)
  - Lokální extrémy funkcí více proměnných
- 3 Zobrazení mezi euklidovskými prostory
  - Zobrazení a transformace
  - „Chain Rule“
- 4 Věta o inverzním zobrazení

## Definition

Funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je **diferencovatelná v bodě**  $x$ , jestliže

- 1 v bodě  $x$  existují všechny směrové derivace  $d_v f(x)$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ ,
- 2  $d_v f(x)$  je lineární v závislosti na přírůstku  $v$  a
- 3  $0 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x+v) - f(x) - d_v f(x))$ .

## Theorem

*Nechť  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce  $n$  proměnných, která má v okolí bodu  $x \in E_n$  spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál  $df$  v bodě  $x$  a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (*)$$

## Theorem

*Nechť  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  je  $k$ -krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu  $k$  včetně v okolí bodu  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.*

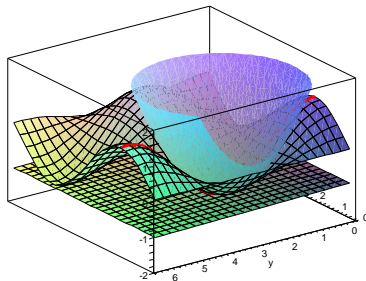
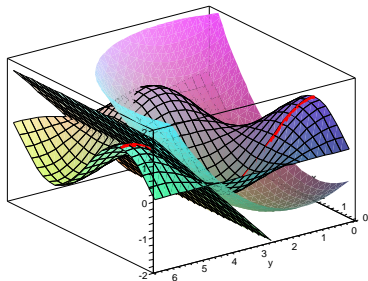
## Definition

Je-li  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  libovolná dvakrát diferencovatelná funkce, nazýváme symetrickou matici funkcí

$$Hf(x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessián funkce  $f$  v bodě  $x$ .

## Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!



Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ .

Obecně pro funkci  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ , body  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$  a přírůstky  $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  klademe

$$D^k f(x)(v) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}.$$



Ukažme ve dvou proměnných:

Tečná rovina:  $f(x_0, y_0) + D^1(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Aproximace pomocí hesiánu:

$f(x_0, y_0) + D^1(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2}D^2(x_0, y_0)f(x - x_0, y - y_0)$   
výraz třetího řádu

$$D^3f(x, y)(\xi, \eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \xi^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \xi^2 \eta + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \xi \eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \eta^3$$

a obecně

$$D^k f(x, y)(\xi, \eta) = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-\ell} \partial y^\ell} \xi^{k-\ell} \eta^\ell.$$

## Theorem (Taylorův rozvoj se zbytkem)

Nechť  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  je  $k$ -krát diferencovatelná funkce v okolí  $\mathcal{O}_\delta(x)$  bodu  $x \in E_n$ . Pro každý přírůstek  $v \in \mathbb{R}^n$  s velikostí  $\|v\| < \delta$  pak existuje číslo  $0 \leq \theta \leq 1$  takové, že

$$f(x + v) = f(x) + D^1 f(x)(v) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} f(x)(v) + \frac{1}{k!} D^k f(x + \theta \cdot v)(v).$$

Náznak důkazu: Pro přírůstek  $v \in \mathbb{R}^n$  volíme  $c(t) = x + tv$  v  $E_n$  a zkoumáme  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou složením  $\varphi(t) = f \circ c(t)$ .

Taylorova věta pro funkce jedné proměnné říká:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \varphi^{(k-1)}(0)t^{k-1} + \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(\theta)t^k.$$

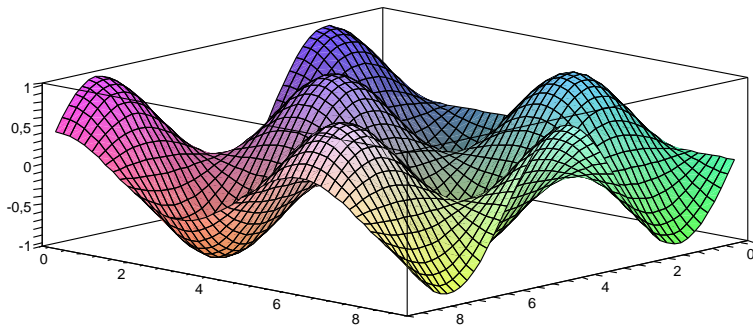
Zbývá nám tedy jen ověřit, že postupným derivováním složené funkce  $\varphi$  dostaneme právě požadovaný vztah. To lze provést indukcí přes řád  $k$ .

## Definition

Vnitřní bod  $x_0 \in E_n$  definičního oboru funkce  $f$  je (lokálním) **maximem** nebo **minimem**, jestliže existuje jeho okolí  $U$  takové, že pro všechny body  $x \in U$  splňuje funkční hodnota  $f(x) \leq f(x_0)$  nebo  $f(x) \geq f(x_0)$ . Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny  $x \neq x_0$ , hovoříme o **ostrém extrému**. Vnitřní bod  $x \in E_n$  definičního oboru funkce  $f$ , ve kterém je diferenciál  $df(x)$  nulový nazýváme **stacionární bod funkce  $f$** .

Nutnou podmínkou pro existenci maxima nebo minima v bodě  $x_0$  je vymizení diferenciálu v tomto bodě, tj.  $df(x_0) = 0$ . Skutečně, pokud je  $df(x_0) \neq 0$ , pak existuje směr  $v$ , ve kterém je  $d_v f(x_0) \neq 0$ . Pak ovšem nutně je podél přímky  $x_0 + tv$  na jednu stranu od bodu  $x_0$  hodnota funkce roste a na druhou klesá.

Už na minulé přednášce jsme počítali s funkcí  
 $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ , která připomíná známá kartonová plata na vajíčka



Spočtěme si první a poté druhé derivace:

$$f_x(x, y) = \cos(x) \cos(y), \quad f_y(x, y) = -\sin(x) \sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

- 1  $\cos(x) = 0, \sin(y) = 0$ , to je  $(x, y) = (\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi)$ , pro libovolné  $k, \ell \in \mathbb{Z}$
- 2  $\cos(x) = 0, \sin(y) = 0$ , to je  $(x, y) = (k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi)$ , pro libovolné  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ .

Druhé parciální derivace jsou

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \cos(y) & -\cos(x) \sin(y) \\ -\cos(x) \sin(y) & -\sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

- ①  $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , přičemž znaménko  $+$  nastává, když parity  $k$  a  $\ell$  jsou stejné a naopak pro  $-$ ,
- ②  $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , přičemž znaménko  $+$  nastává, když parity  $k$  a  $\ell$  jsou stejné a naopak pro  $-$ .

Taylorova věta pro řád  $k = 2$  dává okolí stacionárních bodů  $(x_0, y_0)$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} Hf(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))(x - x_0, y - y_0),$$

kde  $Hf$  nyní vnímáme jako kvadratickou formu vyčíslenou na přírůstku  $(x - x_0, y - y_0)$ . nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod  $(x_0, y_0)$  patří do první skupiny se stejnými paritami  $k$  a  $\ell$ . Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima. Naopak, hessián u druhé skupiny bodů se vyčíslí kladně na některých přírůstcích a záporně na jiných. Stejně se proto bude chovat i celá funkce  $f$  v okolí.

## Definition

Kvadratická forma  $h : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  je

- **pozitivně definitní**, je-li  $h(u) > 0$  pro všechny  $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li  $h(u) \geq 0$  pro všechny  $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li  $h(u) < 0$  pro všechny  $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li  $h(u) \leq 0$  pro všechny  $u \in V$
- **indefinitní**, je-li  $h(u) > 0$  a  $h(v) < 0$  pro vhodné  $u, v \in V$ .

1. semestr  $\rightarrow$  metody, které umožňují přímo zjistit, zda daná forma má některou z těchto vlastností. (Zejména Sylvestrovo kritérium.)

## Theorem

*Nechť  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a  $x \in E_n$  nechť je stacionární bod funkce  $f$ . Potom*

- 1  *$f$  má v  $x$  ostré lokální minimum, je-li  $Hf(x)$  pozitivně definitní,*
- 2  *$f$  má v  $x$  ostré lokální maximum, je-li  $Hf(x)$  negativně definitní,*
- 3  *$f$  nemá v bodě  $x$  lokální extrém je-li  $Hf(x)$  indefinitní.*

Všimněme si, že věta nedává žádný výsledek, pokud je hessián funkce ve zkoumaném bodě degenerovaný a přitom není indefinitní. Důvod je opět stejný jako u funkcí jedné proměnné. V takových případech totiž existují směry, ve kterých první i druhá derivace zmizí a my proto v tomto řádu přiblížení neumíme poznat, zda se funkce bude chovat jako  $t^3$  nebo jako  $\pm t^4$  dokud nespočteme alespoň v potřebných směrech derivace vyšší.



# Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Taylorova věta
  - Derivace a diferenciál (připomenutí)
  - Lokální extrémy funkcí více proměnných
- 3 Zobrazení mezi euklidovskými prostory
  - Zobrazení a transformace
  - „Chain Rule“
- 4 Věta o inverzním zobrazení

Zobrazení  $F : E_n \rightarrow E_m$  je při zvolených kartézských souřadnicích na obou stranách obyčejná  $m$ -tice

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

funkcí  $f_i : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $F$  je *diferencovatelné* nebo *spojitě diferencovatelné zobrazení*, jestliže tuto vlastnost mají všechny funkce  $f_1, \dots, f_m$ .

Diferencovatelná zobrazení  $F : E_n \rightarrow E_n$ , která mají inverzní zobrazení  $G : E_n \rightarrow E_n$  definované na celém svém obrazu, se nazývají **(diferencovatelné) transformace**. Příkladem transformace je přechod mezi kartézskými a polárními souřadnicemi. (Pozor na definiční obor.)

Lineární zobrazení  $D^1 f_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineárně aproximují přírůstky jednotlivých komponent  $f_i$ .

## Definition

$$D^1F(x) = \begin{pmatrix} df_1(x) \\ df_2(x) \\ \vdots \\ df_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x)$$

se nazývá **Jacobiho matice zobrazení**  $F$  v bodě  $x$ . Lineární zobrazení  $D^1F(x)$  definované na přírůstcích  $v = (v_1, \dots, v_n)$  pomocí stejně značené Jacobiho matice nazýváme **diferenciál zobrazení**  $F$  v bodě  $x$  z definičního oboru, jestliže

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (F(x+v) - F(x) - D^1F(x)(v)) = 0.$$

Důsledek Věty o existenci diferenciálu pro funkce  $n$  proměnných je:

### Theorem

*Nechť  $F : E_n \rightarrow E_m$  je zobrazení, jehož všechny souřadné funkce mají spojité parciální derivace v okolí bodu  $x \in E_n$ . Pak existuje diferenciál  $D^1F(x)$  zadaný Jacobiho maticí.*

## Theorem

*Nechť  $F : E_n \rightarrow E_m$  a  $G : E_m \rightarrow E_r$  jsou dvě diferencovatelná zobrazení, přičemž definiční obor  $G$  obsahuje celý obor hodnot  $F$ . Pak také složené zobrazení  $G \circ F$  je diferencovatelné a jeho diferenciál je v každém bodě z definičního obodu  $F$  kompozicí diferenciálů*

$$D^1(G \circ F)(x) = D^1G(F(x)) \circ D^1F(x).$$

*Příslušná Jacobiho matice je dána součinem příslušných Jacobiho matic.*

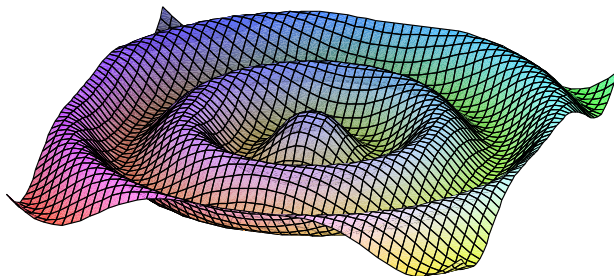
Polární souřadnice vzniknou z kartézských transformací  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kterou v souřadnicích  $(x, y)$  a  $(r, \varphi)$  zapíšeme:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Funkci  $g_t : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  v polárních souřadnicích

$$g(r, \varphi, t) = \sin(r-t).$$

Funkce nám docela dobře přibližuje vlnění povrchu hladiny po bodovém vzruchu v počátku v čase  $t$ :



Derivace v kartézských souřadnicích:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, t) &= \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \\ &= \cos(\sqrt{x^2 + y^2} - t) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 0\end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, t) &= \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \\ &= \cos(\sqrt{x^2 + y^2} - t) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

# Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Taylorova věta
  - Derivace a diferenciál (připomenutí)
  - Lokální extrémy funkcí více proměnných
- 3 Zobrazení mezi euklidovskými prostory
  - Zobrazení a transformace
  - „Chain Rule“
- 4 Věta o inverzním zobrazení



## Theorem

*Nechť  $F : E_n \rightarrow E_n$  je spojitě diferencovatelné zobrazení na nějakém okolí bodu  $x_0 \in E_n$  a necht' je Jacobiho matice  $D^1 f(x_0)$  invertibilní. Pak na nějakém okolí bodu  $x_0$  existuje inverzní zobrazení  $F^{-1}$  a jeho diferenciál v bodě  $F(x_0)$  je inverzním zobrazením k  $D^1 F(x_0)$ , tzn. je zadán inverzní maticí k Jacobiho matici zobrazení  $F$  v bodě  $x_0$ .*