Faculty of Informatics
Masaryk University Brno

Cvičení k předmětu IA006
Vybrané kapitoly z teorie automatů

poslední modifikace 4. listopadu 2015

Tato sbírka byla vytvořena z příkladů ke cvičení z předmětu *Teorie automatů a formálních jazyků II*, které byly původně připraveny Ivanou Černou. Na opravě nesčetných chyb a doplnění příkladů se podílelo mnoho studentů a cvíčící předmětu *IA006 Vybrané kapitoly teorie automatů* Jiří Barnat, Vojtěch Řehák a Jan Strejček.

Funkce FIRST a FOLLOW

Opakování a motivace

1.1 Je dána následující gramatika G. Navrhněte PDA (zásobníkový automat), který analyzuje slova nad abecedou $\{a, b, c\}$ metodou shora dolů.

$G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \rightarrow aSa \mid bSc \mid aA,$
$\quad A \rightarrow bbAb \mid \varepsilon\ \}$

Operace $k{:}w$ a $L_1 \oplus_k L_2$

Nechť $k \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo, w je slovo a L_1, L_2 jsou jazyky. Operace $k{:}w$ a $L_1 \oplus_k L_2$ definujeme následovně:

$$k{:}w = \begin{cases} w & \text{pokud } |w| \leq k \\ u, \text{ kde } |u| = k \text{ a } w = u.v \text{ pro nějaké } v & \text{pokud } |w| > k \end{cases}$$

$$L_1 \oplus_k L_2 = \{k{:}w \mid w \in L_1.L_2\}$$

Tedy $k{:}w$ je prvních k písmen slova w (případně celé slovo w, je-li jeho délka kratší než k) a $L_1 \oplus_k L_2$ je jazyk všech slov z $L_1.L_2$ zkrácený stejným způsobem na prvních k písmen.

FIRST a FOLLOW

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ jsou funkce $FIRST_k^G$ a $FOLLOW_k^G$ definovány následovně:

$FIRST_k^G : (\Sigma \cup N)^* \longrightarrow 2^{\Sigma^*}$
$FIRST_k^G(\alpha) = \{k : w \mid \alpha \Rightarrow^* w,\ w \in \Sigma^*\}$

$FOLLOW_k^G : N \longrightarrow 2^{\Sigma^*}$
$FOLLOW_k^G(A) = \{w \mid S \Rightarrow^* \gamma A \alpha,\ w \in FIRST_k^G(\alpha)\ ;\ \gamma, \alpha \in (\Sigma \cup N)^*\}$

Pozor na typ argumentu u jednotlivých funkcí. Argumentem funkce $FIRST_k^G(\alpha)$ je řetězec terminálů a neterminálů ($\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$), na rozdíl od funkce $FOLLOW_k^G(A)$, jejíž argumentem je vždy právě jeden neterminál ($A \in N$).

Definice funkcí $FIRST_k^G$ a $FOLLOW_k^G$ lze přirozeně rozšířit také na množiny odpovídajících argumentů, což je užitečné zejména pro funkci $FIRST_k^G$.

$$FIRST_k^G : 2^{(\Sigma \cup N)^*} \longrightarrow 2^{\Sigma^*} \qquad FOLLOW_k^G : 2^N \longrightarrow 2^{\Sigma^*}$$
$$FIRST_k^G(M) = \bigcup_{\alpha \in M} FIRST_k^G(\alpha) \qquad FOLLOW_k^G(M) = \bigcup_{A \in M} FOLLOW_k^G(A)$$

Dále budeme používat zkrácené zápisy funkcí, $FI_k(\alpha)$ pro $FIRST_k^G(\alpha)$ a $FO_k(A)$ pro $FOLLOW_k^G(A)$ (G je zřejmé z kontextu a typicky se neuvádí).

Algoritmus pro výpočet funkce FIRST

Je dána gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$ a řetězec $\alpha = Y_1 Y_2 \dots Y_l$, kde každé $Y_i \in N \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

1) $FI_k(x) = \{x\}$ pro $x \in \Sigma$, $FI_k(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$

2) Výpočet $FI_k(x)$ pro $x \in N$:

   Nechť $N = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Budeme počítat hodnotu $FI_k(X_i)$ současně pro všechny neterminály $(i = 1, \dots, n)$. Nejprve sestavíme pro každý neterminál X_i příslušnou rovnici. Nechť všechna pravidla pro neterminál X_i jsou tato:

   $$X_i \to Y_1^1 \dots Y_{k_1}^1 \mid Y_1^2 \dots Y_{k_2}^2 \mid \dots \mid Y_1^j \dots Y_{k_j}^j$$

   Potom

   $$\begin{aligned} FI_k(X_i) = \quad & \big(FI_k(Y_1^1) \oplus_k FI_k(Y_2^1) \oplus_k \dots \oplus_k FI_k(Y_{k_1}^1)\big) \cup \\ \cup \ & \big(FI_k(Y_1^2) \oplus_k FI_k(Y_2^2) \oplus_k \dots \oplus_k FI_k(Y_{k_2}^2)\big) \cup \\ & \qquad\qquad \vdots \\ \cup \ & \big(FI_k(Y_1^j) \oplus_k FI_k(Y_2^j) \oplus_k \dots \oplus_k FI_k(Y_{k_j}^j)\big) \end{aligned}$$

   Hodnoty $FI_k(X_i)$ jsou nejmenším pevným bodem uvedené soustavy rekurzivních rovnic. Nejmenší pevný bod spočítáme tak, že nejprve nastavíme všechna $FI_k(X_i)$ na hodnotu $FI_k(X_i) = \emptyset$. V první iteraci dosadíme tyto hodnoty do pravých stran rovnic. Vyhodnocením rovnic získáme nové hodnoty pro všechna $FI_k(X_i)$. Tyto nové hodnoty v další iteraci opět dosadíme do pravých stran rovnic. Tento postup opakujeme tak dlouho, dokud nám ve dvou po sobě jdoucích iteracích nevyjdou stejné hodnoty pro všechna $FI_k(X_i)$. Takto získané hodnoty jsou nejmenším pevným bodem a tedy i hledanými množinami $FI_k(X_i)$. Chceme-li výpočet nejmenšího pevného bodu urychlit, můžeme při dosazování do pravých stran rovnic použít namísto hodnot z předchozí iterace již známé hodnoty z aktuální iterace.

3) $FI_k(\alpha) = FI_k(Y_1) \oplus_k FI_k(Y_2) \oplus_k \dots \oplus_k FI_k(Y_l)$

Algoritmus pro výpočet funkce FOLLOW

Je dána gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$. Funkce FO_k je definována pouze pro neterminály. Opět budeme počítat hodnotu $FO_k(X_i)$ pro všechny neterminály X_i současně. Nejprve opět sestavíme příslušné rovnice. Pro každý neterminál A, který není kořenový, klademe:

$$FO_k(A) = \bigcup_{(B \to \alpha A \beta) \in P} FI_k(\beta) \oplus_k FO_k(B)$$

Pro kořenový neterminál S klademe:

$$FO_k(S) = \{\varepsilon\} \ \cup \bigcup_{(B \to \alpha S \beta) \in P} FI_k(\beta) \oplus_k FO_k(B)$$

Hodnoty tvaru $FI_k(\beta)$ spočítáme dle předchozího algoritmu a dosadíme do rovnic. Následně spočítáme všechny hodnoty $FO_k(X_i)$ jako nejmenší pevný bod rovnic (použijeme stejný postup výpočtu jako u předchozího algoritmu).

Hodnoty výrazu $FI_k(\alpha)$ i $FO_k(A)$ lze často určit intuitivně, buď přímo z definice funkcí nebo s využitím příslušných rovnic (zejména pokud nejsou rekurzivní). Uvedené rovnice se často dají zjednodušit s využitím následujícího pozorování. Pokud víme, že délka nejkratšího řetězce v jazyku L_1 je alespoň n, pak platí:

$$L_1 \oplus_k L_2 = \begin{cases} L_1 \oplus_k FI_{k-n}(L_2) & \text{pokud } n < k \\ \{k{:}w \mid w \in L_1\} & \text{pokud } n \geq k \text{ a } L_2 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{pokud } n \geq k \text{ a } L_2 = \emptyset \end{cases}$$

S využitím tohoto principu snadno můžeme například nahradit výraz $FI_3(aBcD) \oplus_3 FO_3(E)$ ekvivalentním výrazem $FI_3(aBcD) \oplus_3 FO_1(E)$. Z podobných důvodů lze například výraz $FI_2(aBcDeF)$ nahradit ekvivalentním výrazem $FI_2(aBc)$, ovšem pouze za předpokladu, že neterminály D, F jsou normované (tj. lze z nich odvodit nějaký řetězec terminálů).

1.2 Podle algoritmu řešte $FI_2(A)$ a $FI_3(Ae)$ pro gramatiku

$G = (\{A, B, C, D\}, \{c, a, d, e\}, P, A)$, kde
$P = \{\ A \to Bc \mid a,$
$\quad B \to A \mid C \mid d,$
$\quad C \to B \mid d,$
$\quad D \to e\ \}$

1.3 Podle algoritmu řešte $FI_2(A)$ a $FI_3(A)$ pro gramatiku

$G = (\{A\}, \{a, b\}, P, A)$, kde
$P = \{\ A \to Aa,$
$\quad A \to b\ \}$

1.4 Vypočítejte $FI_1(BBb)$, $FI_2(BBb)$, $FO_1(A)$, $FO_1(S)$, $FO_1(B)$, $FO_1(C)$, $FO_3(A)$, $FO_3(S)$, $FO_3(C)$, $FI_1(SAcB)$, $FI_4(SAcB)$ pro následující gramatiku:

$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, c, b, e, d\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aAc \mid B,$
$\quad A \to aA \mid bSCe \mid \varepsilon,$
$\quad B \to aC \mid \varepsilon,$
$\quad C \to d \mid \varepsilon\ \}$

1.5 Podle algoritmu řešte $FO_k(X)$, kde $k = 1, 2, 3, 4$ a $X \in \{S, A, B, C, D\}$ pro následující gramatiku:

$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, d, c, x, y, z\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aABbCD \mid \varepsilon,$
$\quad A \to ASd \mid \varepsilon,$
$\quad B \to SAc \mid xC \mid \varepsilon,$
$\quad C \to Sy \mid Cz \mid \varepsilon,$
$\quad D \to aBD \mid \varepsilon\ \}$

1.6 Vypočítejte $FO_k(X)$, kde $k = 1, 2, 3, 4$ a $X \in \{S, A, B, C, D\}$ pro následující gramatiku:

$G = (\{S, B, A, D, C\}, \{a, c, b, d\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aBcB,$
$\quad A \to aA \mid Aa,$
$\quad B \to DAc \mid bA,$
$\quad C \to cBc \mid aaB,$
$\quad D \to d \mid dC\ \}$

1.7 Zamyslete se, v jakých případech platí následující vztahy:

a) $FI_k(A) = \emptyset$
b) $\varepsilon \in FI_k(A)$
c) $FI_k(A) \subseteq FI_{k+1}(A)$
d) $FI_{k+1}(A) \subseteq FI_k(A)$
e) $FI_k(\alpha \cdot FO_k(X)) = FI_k(\alpha) \oplus_k FO_k(X)$
f) $FO_k(A) = \emptyset$
g) $\varepsilon \in FO_k(A)$
h) $FO_k(A) \subseteq FO_{k+1}(A)$
i) $FO_{k+1}(A) \subseteq FO_k(A)$
j) $FO_k(A) \subseteq FO_k(B)$
k) $(L_1 \oplus_k L_2) \oplus_k L_3 = L_1 \oplus_k (L_2 \oplus_k L_3)$

SLL(k) gramatiky a analyzátory

Intuitivně řečeno, gramatika G je $SLL(k)$, právě když se odpovídající nedeterministický syntaktický analyzátor pro analýzu shora dolů dokáže vždy jednoznačně rozhodnout pouze na základě neterminálu na vrcholu zásobníku a prvních k písmen z dosud nepřečteného vstupu. Formálně, gramatika G je $SLL(k)$, právě když pro všechny neterminály $A \in N$ a pro každá dvě různá pravidla $A \to \beta$, $A \to \gamma$ platí:

$$FI_k(\beta) \oplus_k FO_k(A) \ \cap \ FI_k(\gamma) \oplus_k FO_k(A) = \emptyset$$

2.1 Ověřte, zda následující gramatika je $SLL(2)$:

$G = (\{S, X, Y\}, \{b, a\}, P, S)$, kde
$P = \{ \ S \ \to \ X,$
$\quad X \ \to \ Y \ \mid \ bYa,$
$\quad Y \ \to \ a \ \mid \ \varepsilon \ \}$

2.2 Ověřte, zda gramatika je $SLL(3)$:

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
$P = \{ \ S \ \to \ aAaB \ \mid \ bAbB,$
$\quad A \ \to \ a \ \mid \ ab,$
$\quad B \ \to \ aB \ \mid \ a \ \}$

2.3 Navrhněte $SLL(2)$ analyzátor pro následující gramatiku a analyzujte slovo `acaac` a slovo `abaac`.

$G = (\{S, A, B, D\}, \{a, c, b\}, P, S)$, kde
$P = \{ \ S \ \to \ aAaA,$
$\quad S \ \to \ aBaB,$
$\quad A \ \to \ aA,$
$\quad A \ \to \ c,$
$\quad B \ \to \ bD,$
$\quad D \ \to \ bD,$
$\quad D \ \to \ \varepsilon \ \}$

2.4 Navrhněte $SLL(3)$ analyzátor pro gramatiku a analyzujte slovo `bababab`.

$G = (\{S, A, B\}, \{b, a\}, P, S)$, kde
$P = \{ \ S \ \to \ baAa,$
$\quad S \ \to \ baBb,$
$\quad A \ \to \ aA,$
$\quad A \ \to \ aB,$
$\quad B \ \to \ bA,$
$\quad B \ \to \ \varepsilon \ \}$

LL(k) gramatiky a analyzátory

Gramatika je $LL(k)$, právě když pro dvě libovolná různá pravidla gramatiky $A \to \beta, A \to \gamma$ a pro všechny nejlevější větné formy tvaru $wA\alpha$ platí: $FI_k(\beta \cdot \alpha) \cap FI_k(\gamma \cdot \alpha) = \emptyset$

Gramatika je $LL(1)$ právě když je $SLL(1)$. Je-li gramatika G $SLL(k)$, pak je také $LL(k)$.

3.1 Ověřte, zda je následující gramatika $LL(2)$:

$G = (\{S, X, Y\}, \{b, a\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to X,$
$\quad X \to Y \mid bYa,$
$\quad Y \to a \mid \varepsilon\ \}$

3.2 Ověřte, zda je následující gramatika $LL(3)$:

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aAaB \mid bAbB,$
$\quad A \to a \mid ab,$
$\quad B \to aB \mid a\ \}$

3.3 Ukažte, že gramatika není $LL(k)$ pro žádné k:

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b, 0, 1\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to A \mid B,$
$\quad A \to aAb \mid 0,$
$\quad B \to aBbb \mid 1\ \}$

3.4 Ukažte, že gramatika je $LL(k)$:

$G = (\{S, T, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aT$
$\quad T \to SA \mid A$
$\quad A \to bB \mid c$
$\quad B \to b^{k-1}d \mid \varepsilon$

3.5 Zkonstruujte LL(2) analyzátor pro gramatiku G:

$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to \varepsilon,$
$\quad S \to abA,$
$\quad A \to Saa,$
$\quad A \to b\ \}$

3.6 Zkonstruujte LL(3) analyzátor pro gramatiku G:

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aAaB,$
$\quad S \to bAbB,$
$\quad A \to a,$
$\quad A \to ba,$
$\quad B \to aB,$
$\quad B \to a\ \}$

3.7 Najděte LL(1) analyzátor pro jazyk generovaný následující gramatikou:

$G = (\{STAT, VAR, IDLIST\}, \{if, id, then, else, fi, while, do, od, (,), :=\}, P, STAT)$
$P = \{\ STAT \to if\ id\ then\ STAT\ else\ STAT\ fi$
$STAT \to while\ id\ do\ STAT\ od$
$STAT \to VAR := VAR$
$STAT \to id \mid (IDLIST)$
$VAR \to id \mid id\ (IDLIST)$
$IDLIST \to id \mid id\ (IDLIST)$

3.8 Navrhněte gramatiku, která je $LL(2)$ a není $SLL(2)$.

3.9 Navrhněte gramatiku, která

a) je $SLL(3)$ a není $LL(2)$

b) je $SLL(2)$ a není $LL(3)$

c) je $LL(2)$ a není $SLL(3)$

d) je $LL(3)$ a není $SLL(2)$

3.10 Navrhněte gramatiku, která není $LL(k)$ pro žádné k.

Transformace LL(k) gramatik

Motivace:

- Gramatika je $LL(1)$, právě když je $SLL(1)$.
- Pro gramatiky, které jsou $SLL(1)$, se snadno konstruuje analyzátor.

Platí:

- Pro danou bezkontextovou gramatiku G je nerozhodnutelné, zda je $LL(k)$ pro nějaké $k \geq 0$.
- Je-li dána bezkontextová gramatika G a pevné k takové, že G není $LL(k)$, pak je nerozhodnutelné určit, zda G má ekvivaletní gramatiku, která je $LL(k)$.

Navzdory výše uvedeným faktům existuje několik transformací, které zachovávají jazykovou ekvivalenci a které *někdy* vedou k $LL(1)$ gramatice.

Gramatika není $LL(1)$ principielně ze dvou důvodů. Těmi jsou konflikt „first-first“ a konflikt „first-follow“. Správný postup řešení příkladu „převod na $LL(1)$ gramatiku“ obsahuje tyto tři kroky: nalezení konfliktů v transformované gramatice (pomocí ověření na $LL(1)$), odstranění konfliktů níže uvedenými postupy, ověření výsledné gramatiky na $LL(1)$ (při nalezení konfliktů opakování předchozího kroku).
V *jednoduché* $LL(1)$ gramatice začínají všechny pravé strany pravidel terminálem, pravidla se stejnou levou stranou začínají různým terminálem.

Odstranění levé rekurze

4.1 Odstraňte levou rekurzi v následující gramatice:

$G = (\{S, A, B\}, \{b, a, c\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \rightarrow SAb \mid SBa \mid Scc \mid AaB \mid bc,$
$\quad A \rightarrow aAa \mid \varepsilon,$
$\quad B \rightarrow BbB \mid b\ \}$

Rohová substituce

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika s pravidlem $A \rightarrow B\alpha$, a nechť všechny $B-$pravidla jsou $B \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_m$.
Nechť $G_1 = (N', \Sigma, P', S)$ je gramatika, která vznikla z G vyloučením pravidla $A \rightarrow B\alpha$ a přidáním pravidel $A \rightarrow \alpha_1\alpha \mid \alpha_2\alpha \mid \ldots \mid \alpha_m\alpha$.

Tato transformace nese název rohová substituce. Je zvláštní tím, že její opakovanou aplikací je možné z gramatiky, která je $LL(1)$ a nemá ε-pravidla, udělat jednoduchou $LL(1)$ gramatiku.

4.2 Aplikujte rohovou substituci na následující gramatiku:

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \rightarrow AB,$
$\quad A \rightarrow ab \mid Ba,$
$\quad B \rightarrow c \mid dB\ \}$

4.3 Aplikujte rohovou substituci na následující gramatiku:

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \rightarrow AB,$
$\quad A \rightarrow aA \mid \varepsilon,$
$\quad B \rightarrow bA \mid \varepsilon\ \}$

Levá faktorizace

Pro $LL(1)$ gramatiku musí platit:

$$A \rightarrow \alpha, A \rightarrow \beta \Rightarrow FIRST_1(\alpha) \cap FIRST_1(\beta) = \emptyset$$

nesplnění této podmínky se označuje jako konflikt FIRST-FIRST.

Kolizi může způsobit přítomnost pravidel tvaru $A \rightarrow \alpha\alpha_1 \mid \alpha\alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha\alpha_n$, kde $\alpha \neq \varepsilon$. Kolizi odstraníme jestliže uvedená pravidla nahradíme pravidly tvaru $A \rightarrow \alpha A'$, $A' \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_n$.

Této transformaci se říká levá faktorizace. Většinou je nutné před touto transformací aplikovat na gramatiku rohovou substituci, aby konflikty uvedeného typu byly v požadované formě.

4.4 Opakovaně aplikujte levou faktorizaci na gramatiku:

$G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, A)$, kde
$P = \{\ A \rightarrow abB \mid acC \mid acdB \mid bBb,$
$\quad B \rightarrow bbaB \mid bbadC \mid cBC,$
$\quad C \rightarrow aA \mid b\ \}$

4.5 Aplikujte levou faktorizaci na gramatiku:

$G = (\{A, B, C\}, \{a, x, y, z\}, P, A)$, kde
$P = \{\ A \rightarrow aBxx \mid aCyy \mid zy \mid zx,$
$\quad B \rightarrow aBx \mid z,$
$\quad C \rightarrow yCy \mid z\ \}$

4.6 Odstraňte konflikt FIRST-FIRST v následující gramatice.

$G = (\{S, A, B\}, \{c, a, b\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \rightarrow A \mid B,$
$\quad A \rightarrow cA \mid a,$
$\quad B \rightarrow cB \mid b\ \}$

4.7 Odstraňte konflikt FIRST-FIRST v následující gramatice.

$G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, A)$, kde
$P = \{\ A \rightarrow aB \mid CB,$
$\quad C \rightarrow aC \mid bB,$
$\quad B \rightarrow cB \mid d\ \}$

4.8 Odstraňte konflikt FIRST-FIRST v následující gramatice.

$G = (\{A, B, D\}, \{c, d, b, x, y, z\}, P, A)$, kde
$P = \{\ A \rightarrow Bc \mid Dd,$
$\quad B \rightarrow bx \mid y,$
$\quad D \rightarrow Bz\ \}$

4.9 Odstraňte konflikt FIRST-FIRST v následující gramatice.

$G = (\{S, A, B\}, \{b, c, a, d\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \rightarrow A \mid AbcB \mid bc,$
$\quad A \rightarrow a,$
$\quad B \rightarrow A \mid dd\ \}$

4.10 Odstraňte konflikt FIRST-FIRST v následující gramatice.

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to A \mid B,$
$\quad A \to aAb \mid \varepsilon,$
$\quad B \to aBc \mid \varepsilon\ \}$

Pohlcení terminálního symbolu

Pro $LL(1)$ gramatiku musí platit:

$$A \to \alpha, A \to \varepsilon \Rightarrow FIRST_1(\alpha) \cap FOLLOW_1(A) = \emptyset$$

nesplnění této podmínky se označuje jako konflikt FIRST-FOLLOW.

Nechť $\{a\} \subseteq FIRST_1(\gamma_i) \cap FOLLOW_1(A)$. Může to být způsobeno tím, že v gramatice je pravidlo následujícího tvaru: $X \to \alpha A a \beta$ a přitom $A-$pravidla jsou tyto: $A \to \gamma_1 \mid \ldots \mid \gamma_n$. Konflikt se můžeme pokusit odstranit tak, že pravidlo $X \to \alpha A a \beta$ nahradíme pravidlem $X \to \alpha [Aa] \beta$ a pro nový neterminál $[Aa]$ přidáme pravidla $[Aa] \to \gamma_1 a \mid \ldots \mid \gamma_n a$. Tím jsme z množiny $FOLLOW_1(A)$ vyloučili symbol a (za předpokladu, že tam není z jiného důvodu).

4.11 Řešte kolizi FIRST-FOLLOW v následující gramatice:

$G = (\{A, B, C\}, \{a, c, b\}, P, A)$, kde
$P = \{\ A \to BaC,$
$\quad B \to \varepsilon \mid aaC,$
$\quad C \to c \mid bC\ \}$

4.12 Řešte kolizi FIRST-FOLLOW v následující gramatice:

$G = (\{A, B, C\}, \{a, c\}, P, A)$, kde
$P = \{\ A \to BaC,$
$\quad B \to aB \mid \varepsilon,$
$\quad C \to c\ \}$

Extrakce pravého kontextu

Pohlcení terminálního symbolu je možné udělat pouze tehdy, vyskytuje-li se přímo za problematickým neterminálem. Situce ale může vypadat například takto: $X \to \alpha A Y \beta$ a $Y\beta \Rightarrow^+ a\gamma$. V tomto případě nelze přímo použít transformaci pohlcení terminálního symbolu, můžeme se však pokusit (opakovaně) substituovat za neterminál bezprostředně vpravo od neterminálu A a obdržet tak konflikt v požadované formě. Této transformaci říkáme extrakce pravého kontextu.

4.13 Pokuste se provést extrakci pravého kontextu a zamyslete se:

$G = (\{S, A, B\}, \{d, a, b, c\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to Ad,$
$\quad A \to aAB \mid b \mid bbc \mid \varepsilon,$
$\quad B \to A\ \}$

4.14 Řešte kolizi FIRST-FOLLOW v následující gramatice:

$G = (\{S, B, A, C\}, \{a, b, d, c\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aBAa \mid bABb,$
$\quad A \to \varepsilon \mid aC \mid BCd,$
$\quad B \to bB \mid CdC,$
$\quad C \to cC \mid d\ \}$

4.15 Transformujte na $LL(1)$ následující gramatiku:

$G = (\{E, T, F, S\}, \{o, n, a, (,)\}, P, E)$, kde
$P = \{\ E \to EoT \mid T,$
$\quad T \to ToF \mid F,$
$\quad F \to nS \mid S,$
$\quad S \to a \mid (E)\ \}$

4.16 Ověřte, zda je následující gramatika $LL(1)$ gramatika. Pokud není, použijte standardní transformace na úpravu gramatiky na $LL(1)$ a o výsledné gramatice dokažte, že je $LL(1)$ gramatikou.

$G = (\{S, A\}, \{b, c, a\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \ \rightarrow \ bcAa \ \mid \ bb,$
$\quad\ A \ \rightarrow \ \varepsilon \quad\ \mid \ acAb\ \}$

LR(0) a SLR(k) analyzátory

Poznámka ke konstrukci analyzátorů LR:

Pro gramatiky, ve kterých se kořen gramatiky (nejčastěji neterminál S) vyskytuje na pravé straně nějakého pravidla zavádíme nový neterminál (nejčastěji označen X) a pravidlo $X \to S$, který se stává novým kořenem gramatiky. Tato modifikace je nutná pro korektní identifikaci situace, ve které má analyzátor úspěšně akceptovat.

Pro gramatiky, ve kterých se kořen gramatiky nevyskytuje na žádné pravé straně pravidla gramatiky, není výše uvedená modifikace nutná. Přispívá však k čitelnosti výsledného analyzátoru. (K akceptování dojde vždy právě v jednom stavu položkového automatu, který je navíc při systematikcé konstrukci vždy druhým stavem položkového automatu.)

$LR(0)$ analyzátor

5.1 Zkonstruujte $LR(0)$ analyzátor

$G = (\{S, A\},\{a, b, c\},P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aAa,$
$\quad S \to aAb,$
$\quad A \to abA,$
$\quad A \to bA,$
$\quad A \to ac\ \}$

a analyzujte slovo `aabbacb`

5.2 Dokažte, nebo vyvraťte, že následující gramatika je $LR(0)$.

$G = (\{S, A, B, C\},\{a, b, c, d\},P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aAa,$
$\quad S \to bBb,$
$\quad S \to cCc,$
$\quad S \to dCd,$
$\quad A \to a \mid aA,$
$\quad B \to bA \mid Cc,$
$\quad C \to cA\ \}$

5.3 Zkonstruujte $LR(0)$ analyzátor a analyzujte libovolné slovo

$G = (\{S, A, C, B, D\},\{a, b, c, d\},P, S)$, kde
$P = \{\ S \to aAa,$
$\quad S \to bAb,$
$\quad S \to cCc,$
$\quad S \to dCd,$
$\quad A \to B,$
$\quad B \to b,$
$\quad C \to D,$
$\quad D \to d\ \}$

$SLR(k)$ analyzátor

5.4 Zkonstruujte $SLR(1)$ a $SLR(2)$ analyzátor

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to AB,$
$A \to aAb,$
$A \to \varepsilon,$
$B \to bB,$
$B \to b\ \}$

a analyzujte slovo `aabbbb` a `aaabbb`

5.5 Najděte všechny $SLR(2)$ konflikty

$G = (\{S, P, R\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to PP,$
$P \to Ra,$
$P \to bRc,$
$P \to dc,$
$P \to bda,$
$R \to d\ \}$

5.6 Dokažte, že gramatika z příkladu 5.5 není $SLR(k)$ pro žádné k.

5.7 Rozhodněte, zda následující gramatika je $SLR(k)$

$G = (\{X, S, L, R\}, \{=, i, d, *\}, P, X)$, kde
$P = \{\ X \to S,$
$S \to L = R,$
$S \to R,$
$L \to id,$
$L \to *R,$
$R \to L\ \}$

5.8 Zkonstruujte $SLR(1)$ analyzátor:

$G = (\{X, S, A\}, \{+, (,), a\}, P, X)$, kde
$P = \{\ X \to S,$
$S \to S + A,$
$S \to A,$
$A \to (S),$
$A \to a(S),$
$A \to a\ \}$

$LR(0)$ a $SLR(k)$ gramatiky

5.9 Zkonstruujte $LR(0)$ gramatiky
$L_1 = \{1^n\, a\, 0^n \mid n \geq 0\} \cup \{1^n\, b\, 0^{2n} \mid n \geq 0\}$
$L_2 = \{a\, 1^n\, 0^n \mid n \geq 0\} \cup \{b\, 1^n\, 0^{2n} \mid n \geq 0\}$
$L_3 = \{1^n\, 0^m \mid m > n > 0\}$
$L_4 = \{w \# w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

5.10 Dokažte, že následující gramatika není $LR(0)$ ale je $SLR(1)$

$G = (\{X, S, A\}, \{+, (,), a\}, P, X)$, kde
$P = \{\ X \to S,$
$S \to S + A,$
$S \to A,$
$A \to (S),$
$A \to a(S),$
$A \to a\ \}$

5.11 Nalezněte co možná nejjednoduší gramatiku takovou, že

a) není $LR(0)$.

b) není $SLR(1)$ protože má konflikt čtení-redukce.

c) není $SLR(1)$ protože má konflikt redukce-redukce.

5.12 Ověřte, zda je následující gramatika $SLR(1)$ či $SLR(2)$ gramatika.

$G = (\{X, S, B\}, \{a, b\}, P, X)$, kde

$P = \{\ X \rightarrow S,$
$\quad S \rightarrow aB,$
$\quad S \rightarrow a,$
$\quad B \rightarrow bSb\ \}$

LR(k) a LALR(k) analyzátory

6.1 Rozhodněte, zda je gramatika $LR(0)$, $SLR(1)$, $LALR(1)$, $LR(1)$

$G = (\{X, S, A, B\}, \{a, d, b, e, c\}, P, X)$, kde
$P = \{\ X \to S,$
$S \to aAd,$
$S \to bBd,$
$S \to aBe,$
$S \to bAe,$
$A \to c,$
$B \to c\ \}$

6.2 Rozhodněte, zda je gramatika $LR(0)$, $SLR(1)$, $LALR(1)$, $LR(1)$

$G = (\{X, S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, X)$, kde
$P = \{\ X \to S,$
$S \to AB,$
$A \to a,$
$B \to CD,$
$B \to aE,$
$C \to ab,$
$D \to bb,$
$E \to bba\ \}$

6.3 Zkonstruujte $LALR(1)$ analyzátor

$G = (\{X, S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, X)$, kde
$P = \{\ X \to S,$
$S \to aAb,$
$S \to c,$
$S \to cB,$
$A \to bS,$
$A \to Bc,$
$B \to c\ \}$

6.4 Zkonstruujte iniciální stav $LR(2)$ automatu

$G = (\{S, R\}, \{+, a\}, P, S)$, kde
$P = \{\ S \to R,$
$R \to RR,$
$R \to R + R,$
$R \to a\ \ \}$

6.5 Proveďte $LR(1)$ analýzu

$G = (\{X, S, A\}, \{a, b\}, P, X)$, kde
$P = \{\ X \to S,$
$S \to aAS,$
$S \to \varepsilon,$
$A \to bb\ \}$

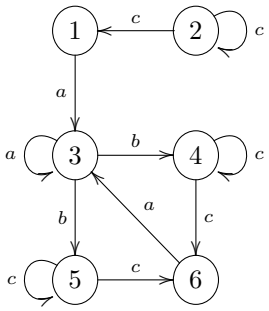
6.6 Zkonstruujte analyzátor a analyzujte slova 00111 a 11110.

$G = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P, S)$, kde

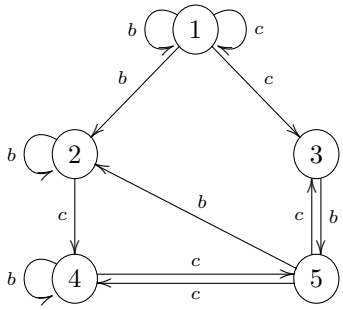
$$
\begin{aligned}
P = \{\ & S \rightarrow AB, \\
& A \rightarrow 0A1, \\
& A \rightarrow \varepsilon, \\
& B \rightarrow 1B, \\
& B \rightarrow 1\ \}
\end{aligned}
$$

Bisimulace

7.1 Pro daný přechodový systém najděte všechny dvojice bisimulačně ekvivalentních stavů metodou hry. Pomocí bisimulačního kolapsu k němu zkonstruujte ekvivalentní přechodový systém.



7.2 Pro daný přechodový systém najděte maximální bisimulaci metodou postupných aproximací.

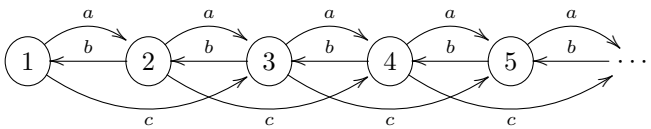


7.3 Je dán přechodový systém P_1 (nekonečně stavový). Zkonstruujte přechodový systém P_2 takový, aby platilo:

(i) P_2 má stav I takový, že $I \sim 1$

(ii) P_2 je konečně stavový

Jaká je maximální bisimulace pro P_1?
P_1:



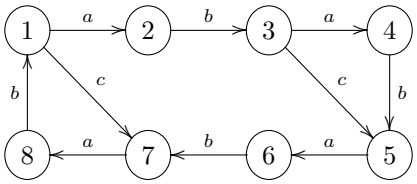
7.4 Najděte konečné automaty A_1, A_2 bez ε-přechodů takové, aby splňovaly všechny tři následující podmínky:

(i) $\mathcal{L}(A_1) = \mathcal{L}(A_2)$

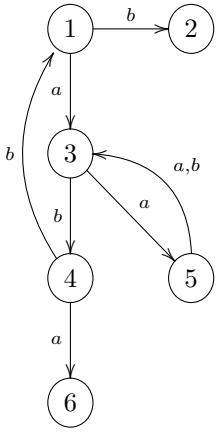
(ii) $\mathcal{L}(A_1)$ je nekonečný

(iii) Počáteční stavy automatů A_1, A_2 nejsou bisimulačně ekvivalentní

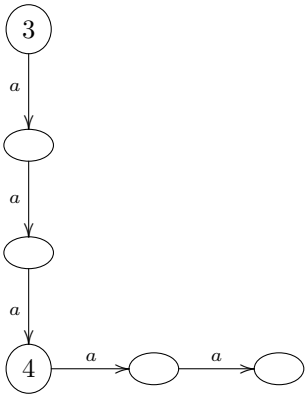
7.5 Dokažte nebo vyvraťte: $2 \sim 8$.
Najděte maximální bisimulaci.



7.6 Najděte nejmenší n, takové aby platilo $3 \not\sim_n 4$, ale $3 \sim_{n-1} 4$. Najděte maximální bisimulaci. Faktorizujte podle relace bisimulace.



7.7 Najděte nejmenší n, takové aby platilo $3 \not\sim_n 4$, ale $3 \sim_{n-1} 4$. Najděte maximální bisimulaci. Faktorizujte podle relace bisimulace.



Přechodové systémy BPA a BPP

8.1 Otázky:

- Je daný proces popsaný deterministickým konečným automatem. Jak zjistím, které stavy jsou bisimulačně ekvivalentní?
- Najděte postačující podmínku na to, aby pro normovaný přechodový systém, byla jazyková ekvivalence shodná s bisimulací.
- Pro normované BPA ověřte: $ABC \sim DBC \Rightarrow A \sim D$
- Najděte nutnou podmínku, aby pro BPA platilo $AA \sim A$.

8.2 Najděte přechodový systém, který je určen následující BPA algebrou.

$$X \xrightarrow{a} XBB$$
$$X \xrightarrow{c} \varepsilon$$
$$B \xrightarrow{a} BBB$$
$$B \xrightarrow{b} \varepsilon$$

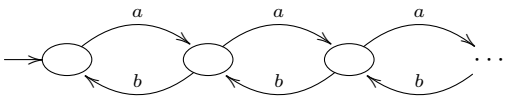
8.3 Jaký jazyk generuje následující BPA (z proměnné X)?

$$X \xrightarrow{a} XA$$
$$X \xrightarrow{b} XB$$
$$X \xrightarrow{c} \varepsilon$$
$$A \xrightarrow{a} \varepsilon$$
$$B \xrightarrow{b} \varepsilon$$

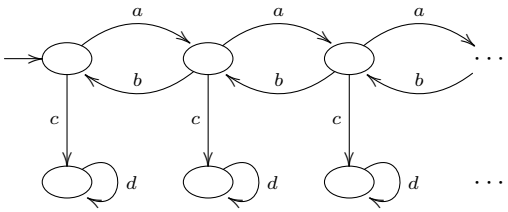
8.4 Nakreslete přechodový systém určený BPP algebrou

$$X \xrightarrow{a} X|B$$
$$X \xrightarrow{c} X|D$$
$$B \xrightarrow{b} \varepsilon$$
$$D \xrightarrow{d} \varepsilon$$
$$(X \xrightarrow{e} \varepsilon\ )$$

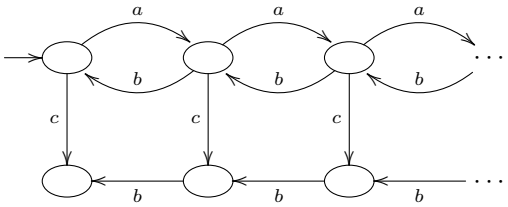
8.5 Vyjádřete daný přechodový systém BPA i BPP syntaxí:



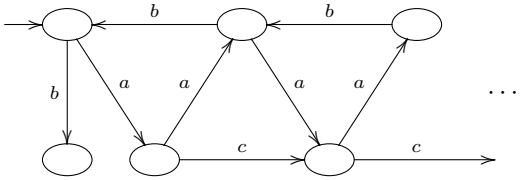
8.6 Vyjádřete daný přechodový systém BPA syntaxí:



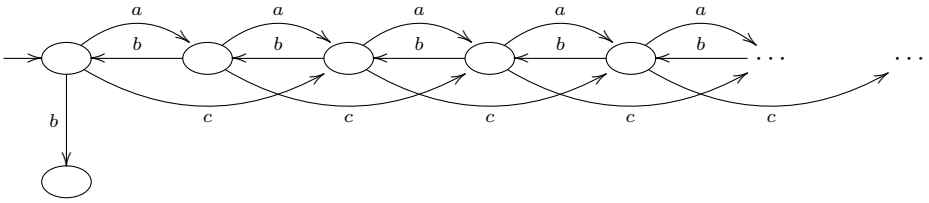
8.7 Vyjádřete daný přechodový systém BPP syntaxí:



8.8 Vyjádřete daný přechodový systém BPA syntaxí:



8.9 Vyjádřete daný přechodový systém BPP syntaxí:



Konstrukce tabel pro BPA

Tablo pro $\gamma = \delta$ se skládá z podtabel. Každé podtablo je strom. Podtablo s kořenem $X\alpha = Y\beta$ vytvoříme následovně. Nechť $k = min\{\|X\|, \|Y\|\}$. Na uzel $X\alpha = Y\beta$ aplikujeme k-krát trojici pravidel (REC, SUM, PREFIX). Po k-aplikacích jsou některé uzly reziduály, jeden z nich označíme jako vytčený a podle něj aplikujeme na ostatní uzly v aktuálním patře pravidlo SUB (respektive SUBL, nebo SUBR). Reziduálem je uzel ve tvaru $\alpha = \gamma\beta$ (použijeme pravdilo SUBL) nebo $\gamma\alpha = \beta$ (použijeme pravdilo SUBR), případně $\alpha = \beta$ (použijeme pravdilo SUB (tj. SUBL, nebo SUBR, na straně nezáleží)). Po aplikaci odpovídajícího pravidla SUB (*a jen tehdy*) obdržíme listy podtabla. Po dokončení podtabla, zkontrolujeme všechny jeho listy. U každého listu nastává jeden z následujících případů:

- List je úspěšný. (Netřeba pro něj budovat podtablo.)
- List je neuspěšný. Pak je celé tablo neúspěšné.
- List není ani úspěšný ani neúspěšný, stává se kořenem nového podtabla.

Jestliže v průběhu tvorby kteréhokoliv podtabla se některý uzel (nemusí to být nutně list) ukáže být neúspěšným podle níže uvedených kritérií, je neúspěšné celé tablo.

Každé podtablo je téměř vyvážený strom. Všechny cesty v něm jsou stejně dlouhé, liší se maximálně o jedna (po aplikaci pravidla SUB,SUBL nebo SUBR se pod vytčeným reziduálem cesta neprodlouží, sám reziduál slouží jako list, a tedy případně i jako kořen dalšího podtabla, zatímco pod ostatními uzly na stejném patře se cesta prodlouží o jedna (díky aplikaci odpovídajícího pravidla SUB) , a teprve tyto uzly (o patro níž než je reziduál) tvoří listy daného podtabla).

Kritéria úspěšnosti:

1. $\alpha = \alpha$
2. $\alpha = \beta$ a na cestě od tohoto listu do kořene *celého tabla* se vyskytuje uzel se stejným označením $\alpha = \beta$ a mezi nimi je alespoň jednou použito pravidlo PREFIX (uzel $\beta = \alpha$ se nepočítá!)

Kritéria neúspěšnosti :

1. $a.\alpha = b.\beta$,kde a je různé od b
2. $\alpha = \beta$,kde $|\alpha|$ je různá od $|\beta|$

Poznámka:

1. Výše uvedená metoda funguje pouze pro NORMOVANÉ BPA !!!
2. Poznámka o zápisu: XY = X.Y

Pravidla

$$\frac{X\alpha = Y\beta}{E\alpha = F\beta} REC \qquad \text{kde } X \stackrel{def}{=} E \text{ a } Y \stackrel{def}{=} F$$

$$\frac{a\alpha = a\beta}{\alpha = \beta} PREFIX$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i)\alpha = (\sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j)\beta}{\{a_i\alpha_i\alpha = b_{f(i)}\beta_{f(i)}\beta\}_{i=1}^{m}\{a_{g(j)}\alpha_{g(j)}\alpha = b_j\beta_j\beta\}_{j=1}^{n}}SUM$$

kde $f : \{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$
$g : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$
$m, n \geq 1$

$$\frac{\alpha_i\alpha = \beta_i\beta}{\alpha_i\gamma = \beta_i}SUBL$$ kde $\alpha = \gamma\beta$ je vytčený residuál

$$\frac{\alpha_i\alpha = \beta_i\beta}{\alpha_i = \beta_i\gamma}SUBR$$ kde $\gamma\alpha = \beta$ je vytčený residuál

9.1 Zkonstruujte důkaz $PQQ = SU$

$P = aPQQ + bRQQ + c$
$Q = c$
$R = bP$
$S = aSU + bT + c$
$T = bSU$
$U = cV$
$V = c$

9.2 Zkonstruujte důkaz $FX = A$, $XCB = BCX$, $FBX = AB$, $CXB = XBB$

$A = aBCX + aB$
$B = aC$
$C = aD$
$D = bD + c$
$F = a + aXC$
$X = aY$
$Y = aD$

9.3 Dokažte $DH \sim DFG$, $AH \sim AGF$, $EF \not\sim D$, $BA \not\sim DG$

$A = aBC + aD + aEF$
$B = b$
$C = c$
$D = bH + bC$
$E = bG$
$F = c$
$G = bA$
$H = cBA$

9.4 Zkonstruujte důkaz $Y = C$

$X = aYX + b$
$Y = bX$
$A = aC + b$
$C = bAA$

9.5 Zkonstruujte důkaz $X = A$

$X = aXX + b + cY$
$Y = aYX + b + cX$
$A = aAA + b + cA$

9.6 Zkonstruujte důkaz $A = E$

$$
\begin{aligned}
A &= aBC + aH \\
B &= b \\
C &= d + aDE \\
D &= bF \\
F &= c \\
E &= aC + aGH \\
G &= b \\
H &= d + aI \\
I &= bK \\
K &= cA
\end{aligned}
$$

9.7 Zkonstruujte důkaz $A = X$

$$
\begin{aligned}
X &= d + aXX + bY + cZ \\
Y &= bX + aYY + cZ + d \\
Z &= bX \\
A &= d + aAA + bA + cB \\
B &= bA
\end{aligned}
$$

9.8 Zkonstruujte důkaz $AB = XYB$

$$
\begin{aligned}
A &= aB + aC \\
X &= a + aZ \\
B &= aB + a \\
Y &= aY + a \\
Z &= bZ + bX \\
C &= bC + bA
\end{aligned}
$$

9.9 Zkonstruujte důkaz $FBI = AB$

$$
\begin{aligned}
A &= aBCI + aB \\
B &= aC \\
C &= aD \\
D &= bD + c \\
F &= a + aIC \\
I &= aK \\
K &= aD
\end{aligned}
$$

Büchiho automaty

10.1 Navrhněte nedeterministický BA pro jazyk všech ω-slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$, která obsahují nekonečný počet symbolů a.

10.2 Navrhněte nedeterministický BA pro jazyk všech ω-slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$, která obsahují nekonečný počet symbolů b a c.

10.3 Navrhněte nedeterministický BA pro jazyk všech ω-slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$, která obsahují nekonečný počet symbolů b a c a pro která platí, že pokud libovolný konečný prefix slova obsahuje lichý počet symbolů b, pak obsahuje také sudý počet symbolů c.

10.4 Navrhněte nedeterministický BA pro jazyk
$L = \{w = w_1 w_2 w_3 \ldots \mid w_i \in \{a, b\}$ pro $i \geq 1$, $\exists$ nekonečně mnoho $j \in \mathbb{N}$ takových, že $w_j = w_{j+4}\}$

10.5 Nechť $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Pro slovo $w = a_0 a_1 a_2 \ldots \in \Sigma^\omega$ a dvě čísla $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq j$ označme $w[i, j]$ podslovo $a_i \ldots a_j$. Pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ definujme jazyk:

$$L_n = \{w \mid w \in ((0+1)^{n-1}\#)^\omega, \text{ a pro nekonečně mnoho } i \geq 0 \text{ platí: } w[2in, (2i+1)n - 1] \neq w[(2i+1)n, (2i+2)n - 1]\}.$$

Popište dva nedeterministické BA A_1, A_2 velikosti $O(n)$ takové, aby $L_n = L(A_1) \cap L(A_2)$.

10.6 Dokažte, nebo vyvraťte: Ke každému NBA A lze zkonstruovat NBA A' s jediným počátečním stavem.

10.7 Nechť jazyk $L = \{w \in \{0, 1\}^\omega \mid$ buď $0 \notin inf(w)$, nebo $1 \notin inf(w)\}$.

a) zkonstruujte nedeterministický BA
b) diskutujte, zda je možné sestrojit pro daný jazyk NBA s jedním koncovým stavem
c) dokažte, že pro daný jazyk nelze sestrojit NBA s jedním koncovým stavem

10.8 Konstruujte NBA pro následující jazyky L nad abecedou $\{a, b, c, d\}$.

a) $L = \{w \mid inf(w) = \{a\}\}$
b) $L = \{w \mid inf(w) = \{a, b\}\}$
c) $L = \{w \mid a \in inf(w)\}$
d) $L = \{w \mid a \in inf(w) \wedge c \notin inf(w)\}$
e) $L = \{w \mid \{a, b\} \subseteq inf(w) \wedge d \notin inf(w)\}$
f) $L = \{w \mid \{a, b\} \subsetneq inf(w)\}$

10.9 Buď A konečný automat. Označme $L(A)$ množinu slov, kterou akceptuje konečný automat A. Označme $L_\omega(A)$ množinu ω-slov, kterou akceptuje Büchiho automat A. Najděte automat A tak, aby platilo

a) $(L(A))^\omega = L_\omega(A)$
b) $(L(A))^\omega \neq L_\omega(A)$

10.10 Pro jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid inf(w) = \{a, b\}\}$ navrhněte deterministický Mullerův automat, deterministický zobecněný Büchiho automat a deterministický Büchiho automat.

Logika MSO

11.1 Definujte základní syntax logiky MSO.

11.2 Buď Σ abeceda a $w \in \Sigma^*$ konečné slovo, buď φ sentence (formule bez volných proměnných) logiky MSO. Definujte, kdy $w \models \varphi$.

11.3 Definujte následující syntaktické zkratky:

a) $x \leq y, \quad x \geq y, \quad x = y$

b) $\forall x \in X : \varphi$

c) $\exists x \in X : \varphi$

d) $\mathit{first}(x)$ — x je první pozice v neprázdném slově.

e) $\mathit{last}(x)$ — x je poslední pozice v neprázdném slově.

f) $\mathit{succ}(x, y)$ — $x < y$ a pozice x a y bezprostředně sousedí (též značeno jako $x <_1 y$).

11.4 Uveďte, jak je sentencí MSO definován jazyk.

11.5 Nechť $\Sigma = \{a, b\}$. Uveďte sentence logiky MSO, které definují následující regulární jazyky:

a) $\emptyset$

b) $\{\varepsilon\}$

c) $\{a\}$

d) $\{a\}^*$

e) $\{a\}^+$

f) $\{a\}^*.\{b\}$

g) $\{w \in \Sigma^* \mid |w| = 3k \wedge k \geq 0\}$

11.6 Popište jazyky nad abecedou $\{a, b\}$, které jsou dány následujícími sentencemi logiky MSO:

a) $\exists x \exists y \forall z : (x \leq z \wedge x < y \wedge (z < y \implies x = z) \wedge Q_a(y))$

b) $\exists X : [\forall x, y : (\mathit{succ}(x, y) \implies (x \in X \iff y \notin X)) \wedge$
$\wedge \forall x : (x \in X \implies (Q_a(x) \wedge \neg first(x)))]$

11.7 Jaká třída jazyků je popsatelná logikou MSO?

11.8 Jaká třída jazyků je popsatelná logikou prvního řádu?

Plán cvičení

Cvičení 1 — FIRST, FOLLOW, SLL(k)

- Zopakujte, jak funguje nedeterministická analýza metodou shora dolů; v čem tkví nedeterminismus metody, jak ho lze řešit. (Motivace pro FIRST a FOLLOW.)
- Definujte funkci FIRST a na jednoduchých příkladech ukažte, co počítá.
  - Ukažte intuitivní výpočet hodnoty funkce FIRST "rozbalováním".
  - Vysvětlete operátor $\oplus_k$ a uveďte, že $FIRST_k(ABC) = FIRST_k(A) \oplus_k FIRST_k(B) \oplus_k FIRST_k(C)$.
  - Pozor na $A \longrightarrow aA \mid b$ versus $A \longrightarrow aA$
- Definujte funkce FOLLOW a na jednoduchých příkladech ukažte, co počítá.
  - Ukažte problém, kdy pravá strana pravidla není dostatečně "dlouhá"pro výpočet hodnoty $FOLLOW$.
  - Vysvětlete, jak se sestavují rovnice definující hodnoty $FOLLOW$.
  - Připomeňte, že $\varepsilon \in FOLLOW_k(S)$
- Procvičujte funkce $FIRST$ a $FOLLOW$ na příkladu 1.4
- Definujte $SLL(k)$
- Řešte příklad 2.1
- Řešte příklad 2.3

Cvičení 2 — LL(k) a Transformace na SLL(1)

- Připomenutí definice LL(k).
- Demonstrace rozdílu mezi LL(k) a SLL(k) na příkladu 3.1
- Příklad 3.2
- Sestrojte analyzátor ke gramatice z příkladu 3.2, nebo řešte příklad 3.6
- Vysvětlete konflikty FI-FI a FI-FO.
- Zmínit odstranění levé rekurze (konflikt FI-FI) a odkázat na předchozí kurz.
- Odstranění konfliktu FI-FI
  - Rohová substituce

    (Vysvětlete rozdíl rohová versus obecná substituce.)
  - Levá faktorizace

  - Vymyslete příklad gramatiky, na které demonstrujete výše uvedené.
- Převod FI-FO na FI-FI
  - Pohlcení terminálního symbolu
  - Extrakce pravého kontextu
  - Vymyslete příklad gramatiky, na které demonstrujete výše uvedené.
- Demonstrujte, že algoritmické řešení nevede vždy k cíli.
- Příklad 4.6
- D.Ú. Příklad 3.9

Cvičení 3 — LR(0) a SLR(k)

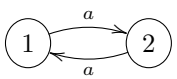
- Připomenutí principu analýzy zdola nahoru.
  - V čem je tato analýza nedeterministická?
  - Nástroje pro řešení nedeterminismu:
    * Nahlížení na k-symbolů na vstupu.
    * Analýza zásobníku (Charakteristický automat)
- Příklad 5.1
  - Sestrojení charakteristického automatu
  - Definice akcí automatu dle jednotlivých položek
    * čtení: položka s terminálem za tečkou
    * redukce: položka s tečkou na konci
  - LR(0) konflikty
  - Přepis do tabulky nalyzátoru (striktně oddělujte GOTO a ACTION část tabulky!)
  - Analýza vybraného slova.
- Příklad 5.4
  - Konstruujte přímo SLR(2)
  - Po úspěšné konstrukci rozhodněte a odůvodněte SLR(1) a LR(0)
- Ve zbývajícím čase nebo na doma řešte příklad 5.11

Cvičení 4 — LR(k) a LALR(k)

- Příklad 6.1
  - Počítejte jako LR(1)
  - Poté diskutujte LR(0) a SLR(1) (zde je demonstrován rozdíl SLR(k) a LR(k))
  - Motivace pro LALR(k)
- Příklad 6.3
  - Diskutujte, jaké LALR konflikty mohou vzniknout pro $k = 1$.
  - LALR není to, že sloučím stavy, které nevytvoří sloučením konflikt.

- Příklad 6.4
  - Demontrace, že je třeba poctivě počítat uzávěr z každé položky.
- Diskuze o vztazích SLR(k) ⇒ LALR(k) ⇒ LR(k).
- Obměna předchozího.

Cvičení 5

- Připomňte se definici relace bisimulace
- Příklad 7.1
  - Bisimulační hrou určete ekvivalentní stavy.
- Příklad 7.2
- Příklad 7.3
- Na systému 

ukažte
  - různé relace bisimulace.
  - relace bisimulace, které nejsou relacemi ekvivalence.
  - Ukažte, jak intuitivně počítat bisimulační uzávěr pro vybranou dvojici (např. (1,2)).
- Příklad 8.2
- Příklad 8.4
- Příklad 8.5
- D.Ú.: Ostatní příklady z kapitoly 8.

Cvičení 6 — Büchi automaty a MSO Logika

- Na příkladu $\{w \in \{a,b\}^\omega \mid w \text{ má nekonečně mnoho } a\}$ vysvětlete princip Büchi automatů.
- Příklad 10.1
- Příklad 10.2
- Příklad 10.3
- Příklad 10.6
- Příklad 10.7 — čárka před nebo indikuje vylučovací poměr!
- Příklad 11.1
- Příklad 11.2
- Příklad 11.3
- Příklad 11.4
- Příklad 11.5
- Příklad 11.6
- Příklad 11.7
- Příklad 11.8

Řešení některých příkladů

1.2 Výpočet $FI_2(A)$ provedeme z pedagogických důvodů zcela algoritmicky.Nejprve sestavíme příslušné rovnice:

$$\begin{array}{lcl} FI_2(A) & = & FI_2(B) \oplus_2 \{c\} \cup \{a\} \\ FI_2(B) & = & FI_2(A) \cup FI_2(C) \cup \{d\} \\ FI_2(C) & = & FI_2(B) \cup \{d\} \end{array}$$

Nyní spočítáme pevný bod rovnic tak,že v každé iteraci používáme striktně hodnoty z předchozí iterace. Poslední sloupec obsahuje výsledné hodnoty.

	0	1	2	3	4	5	6
A	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{dc, a\}$	$\{dc, ac, a\}$	$\{dc, ac, a\}$	$\{dc, ac, a\}$	$\{dc, ac, a\}$
B	$\emptyset$	$\{d\}$	$\{a, d\}$	$\{dc, a, d\}$	$\{dc, ac, a, d\}$	$\{dc, ac, a, d\}$	$\{dc, ac, a, d\}$
C	$\emptyset$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{a, d\}$	$\{dc, a, d\}$	$\{dc, ac, a, d\}$	$\{dc, ac, a, d\}$

Pro zajímavost ukážeme, že pokud použijeme v každé iteraci nejnovější známe hodnoty, výpočet se může výrazně urychlit. Výsledek je však shodný.

	0	1	2	3
A	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{ac, dc, a\}$	$\{ac, dc, a\}$
B	$\emptyset$	$\{a, d\}$	$\{ac, dc, a, d\}$	$\{ac, dc, a, d\}$
C	$\emptyset$	$\{a, d\}$	$\{ac, dc, a, d\}$	$\{ac, dc, a, d\}$

$FI_2(A) = \{ac, dc, a\}$
$FI_3(Ae) = \{ae, dce, ace, dcc, acc\}$

1.3 $FI_2(A) = \{b, ba\}$, $FI_3(A) = \{b, ba, baa\}$

1.4 $FI_1(BBb) = \{a, b\}$
$FI_2(BBb) = \{ad, aa, ab, b\}$
$FO_1(A) = \{c\}$
$FO_1(S) = FO_1(B) = FO_1(C) = \{e, d, \varepsilon\}$
$FO_3(A) = \{cde, cec, c\}$
$FO_3(S) = FO_3(C) = \{ecd, ece, dec, ec, \varepsilon\}$
$FI_1(SAcB) = \{a, b, c\}$
$FI_4(SAcB) = \{aaaa, aaab, aaac, aaba, aabd, aabe, aac, aaca, aacb, aacc, abaa, abab, abac, abad,$
$abae, abde, abec, ac, aca, acaa, acab, acac, acad, acba, acbd, acbe, acc, acca, adaa,$
$adab, adac, adba, adbd, adbe, adc, adca, baaa, baab, baac, baba, babd, babe, bacd,$
$bace, badd, bade, bdec, bec, beca, c, ca, cad\}$

1.5 $FO_1(S) = FO_1(D) = \{\varepsilon, a, c, d, y\}$
$FO_1(A) = \{a, b, c, d, x\}$
$FO_1(B) = \{\varepsilon, a, b, c, d, y\}$
$FO_1(C) = \{\varepsilon, a, b, c, d, y, z\}$
$FO_2(S) = \{\varepsilon, da, db, dc, dd, dx, c, ca, cb, cc, cd, cy, aa, ab, ac, ad, ax, y, ya, yb, yc, yd, yy, yz\}$

1.6 Pozor, gramatika není normovaná, a tudíž generuje prázdný jazyk.

2.1 Není $SLL(2)$, konflikt nastává na pravidlech $Y \to a \mid \varepsilon$.

2.2 Není $SLL(3)$, konflikt nastává na pravidlech $A \to a \mid ab$.

2.3 Nejprve pro každé pravidlo tvaru $A \to \alpha$ spočítáme množinu $FI_2(\alpha) \oplus_2 FO_2(A)$:

1	$S \to aAaA$	$FI_2(aAaA) \oplus_2 FO_2(S)$	$=$	$\{aa, ac\}$
2	$S \to aBaB$	$FI_2(aBaB) \oplus_2 FO_2(S)$	$=$	$\{ab\}$
3	$A \to aA$	$FI_2(aA) \oplus_2 FO_2(A)$	$=$	$\{aa, ac\}$
4	$A \to c$	$FI_2(c) \oplus_2 FO_2(A)$	$=$	$\{ca, c\}$
5	$B \to bD$	$FI_2(bD) \oplus_2 FO_2(B)$	$=$	$\{bb, ba, b\}$
6	$D \to bD$	$FI_2(bD) \oplus_2 FO_2(D)$	$=$	$\{bb, ba, b\}$
7	$D \to \varepsilon$	$FI_2(\varepsilon) \oplus_2 FO_2(D)$	$=$	$\{ab, \varepsilon\}$

Nyní snadno zkonstruujeme tabulku přechodové funkce analyzátoru. Prázdná políčka znamenají, že analyzátor v odpovídající situaci vrátí chybu, protože analyzované slovo není generováno gramatikou G.

	aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc	a	b	c	ε
S	$aAaA, 1$	$aBaB, 2$	$aAaA, 1$										
A	$aA, 3$		$aA, 3$				$c, 4$					$c, 4$	
B				$bD, 5$	$bD, 5$						$bD, 5$		
D		$\varepsilon, 7$		$bD, 6$	$bD, 6$						$bD, 6$		$\varepsilon, 7$
a	ČTI	ČTI	ČTI							ČTI			
b				ČTI	ČTI	ČTI					ČTI		
c							ČTI	ČTI	ČTI			ČTI	
\$													$AKC.$

Zpravidla se uvádí pouze „zajímavá“ část tabulky, t.j. bez řádků pro terminály a pro \$ a bez sloupců, které by následně zůstaly prázdné:

	aa	ab	ac	ba	bb	ca	b	c	ε
S	$aAaA, 1$	$aBaB, 2$	$aAaA, 1$						
A	$aA, 3$		$aA, 3$			$c, 4$		$c, 4$	
B				$bD, 5$	$bD, 5$		$bD, 5$		
D		$\varepsilon, 7$		$bD, 6$	$bD, 6$		$bD, 6$		$\varepsilon, 7$

Analýza slova $acaac$:

$$
\begin{aligned}
& (acaac, S\$, \varepsilon) \vdash (acaac, aAaA\$, 1) \overset{a}{\vdash} (caac, AaA\$, 1) \vdash \\
\vdash\ & (caac, caA\$, 14) \overset{c}{\vdash} (aac, aA\$, 14) \overset{a}{\vdash} (ac, A\$, 14) \vdash \\
\vdash\ & (ac, aA\$, 143) \overset{a}{\vdash} (c, A\$, 143) \vdash (c, c\$, 1434) \overset{c}{\vdash} \\
\overset{c}{\vdash}\ & (\varepsilon, \$, 1434) \Rightarrow \text{akceptuje}
\end{aligned}
$$

Analýza slova $abaac$:

$$
\begin{aligned}
& (abaac, S\$, \varepsilon) \vdash (abaac, aBaB\$, 2) \overset{a}{\vdash} (baac, BaB\$, 2) \vdash \\
\vdash\ & (baac, bDaB\$, 25) \overset{b}{\vdash} (aac, DaB\$, 25) \Rightarrow \text{zamítá}
\end{aligned}
$$

2.4 Zajímavá část tabulky $SLL(3)$ analyzároru vypadá takto:

	baa	bab	aaa	aab	aba	aa	ab	a	b
S	$baAa, 1$	$baBb, 2$							
A			$aA, 3$	$aA, 3$	$aB, 4$	$aB, 4$	$aB, 4$		
B	$bA, 5$	$bA, 5$						$\varepsilon, 6$	$\varepsilon, 6$

3.6 Nejprve zkonstruujeme pomocné LL(3) tabulky:

$T_0 = (S, \{\varepsilon\})$	$S \to aAaB$ $S \to bAbB$	aaa, aba bab, bba	$\{aa, aaa\}, \{\varepsilon\}$ $\{ba, baa\}, \{\varepsilon\}$
$T_1 = (A, \{aa, aaa\})$	$A \to a$ $A \to ba$	aaa baa	$-$ $-$
$T_2 = (B, \{\varepsilon\})$	$B \to aB$ $B \to a$	aa, aaa a	$\{\varepsilon\}$ $-$
$T_3 = (A, \{ba, baa\})$	$A \to a$ $A \to ba$	aba bab	$-$ $-$

Nyní zapíšeme tabulku přechodové funkce analyzátoru. Uvádíme pouze zajímavou část tabulky, tj. řádky popisující situaci, kdy je na vrchovu zásobníku nějaké T_i, a sloupce, které jsou v těchto řádcích tabulky neprázdné. Zbytek tabulky obsahuje pokyn *ČTI*, je-li na vrcholu zásobníku terminál shodný s terminálem na vstupu, a *AKCEPTUJ*, je-li na vrcholu zásobníku jeho dno \$ a celý vstup je přečtený (na vstupu je ε). Ve všech ostatních případech (včetně prázdných buněk uvedené části tabulky) analyzátor vrátí chybu, protože analyzované slovo není generováno gramatikou G.

	aaa	aba	bab	bba	baa	aa	a
T_0	$aT_1aT_2, 1$	$aT_1aT_2, 1$	$bT_3bT_2, 2$	$bT_3bT_2, 2$			
T_1	$a, 3$				$ba, 4$		
T_2	$aT_2, 5$					$aT_2, 5$	$a, 6$
T_3		$a, 3$	$ba, 4$				

4.6 Levá faktorizace na tomto příkladu „cyklí“. Jazykově ekvivalentní jednoduchá $LL(1)$ gramatika je například $(\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to a \mid b \mid cS\}, S)$.

4.10 V této gramatice nelze požadovanou transformací odstranit konflikt. Samozřejmě existuje jiná gramatika, která je s touto jazykově ekvivalentní a je $LL(1)$.

4.12 $A \to [Ba]C,\ [Ba] \to a[Ba] \mid a,\ C \to c$

6.3 LR(1):

0	X $\longrightarrow$ .S	ε	S	1
	S $\longrightarrow$ .aAb	ε	a	2
	S $\longrightarrow$ .c	ε	c	3
	S $\longrightarrow$ .cB	ε	c	3
1	X $\longrightarrow$ S.	ε	Accept	
2	S $\longrightarrow$ a.Ab	ε	A	4
	A $\longrightarrow$ .bS	b	b	5
	A $\longrightarrow$ .Bc	b	B	6
	B $\longrightarrow$ .c	c	c	7
3	S $\longrightarrow$ c.	ε	r(S $\longrightarrow$ c)	
	S $\longrightarrow$ c.B	ε	B	8
	B $\longrightarrow$ .c	ε	c	9
4	S $\longrightarrow$ aA.b	ε	b	10
5	A $\longrightarrow$ b.S	b	S	11
	S $\longrightarrow$ .aAb	b	a	12
	S $\longrightarrow$ .c	b	c	13
	S $\longrightarrow$ .cB	b	c	13
6	A $\longrightarrow$ B.c	b	c	14

7	B $\longrightarrow$ c.	c	r(B $\longrightarrow$ c)	
8	S $\longrightarrow$ cB.	ε	r(S $\longrightarrow$ cB)	
9	B $\longrightarrow$ c.	ε	r(B $\longrightarrow$ c)	
10	S $\longrightarrow$ aAb.	ε	r(S $\longrightarrow$ aAb)	
11	A $\longrightarrow$ bS.	b	r(A $\longrightarrow$ bS)	
12	S $\longrightarrow$ a.Ab	b	A	15
	A $\longrightarrow$ .bS	b	b	5
	A $\longrightarrow$ .Bc	b	B	6
	B $\longrightarrow$ .c	c	c	7
13	S $\longrightarrow$ c.	b	r(S $\longrightarrow$ c)	
	S $\longrightarrow$ c.B	b	B	16
	B $\longrightarrow$ .c	b	c	17
14	A $\longrightarrow$ Bc.	b	r(A $\longrightarrow$ Bc)	
15	S $\longrightarrow$ aA.b	b	b	18
16	S $\longrightarrow$ cB.	b	r(S $\longrightarrow$ cB)	
17	B $\longrightarrow$ c.	b	r(B $\longrightarrow$ c)	
18	S $\longrightarrow$ aAb.	b	r(S $\longrightarrow$ aAb)	

LALR(1): Položkový automat LALR(1) analyzátoru vznikne z položkového automatu LR(1) analyzátoru spojením stavů 2,12 a 3,13 a 4,15 a 7,9,17 a 8,16 a 10,18. Každý nově vzniklý stav jsme označili nejnižším číslem z původních stavů. Položkový automatu tedy bude vypadat takto:

0	X $\longrightarrow$ .S	ε	S	1
	S $\longrightarrow$ .aAb	ε	a	2
	S $\longrightarrow$ .c	ε	c	3
	S $\longrightarrow$ .cB	ε	c	3
1	X $\longrightarrow$ S.	ε	Accept	
2	S $\longrightarrow$ a.Ab	ε, b	A	4
	A $\longrightarrow$ .bS	b	b	5
	A $\longrightarrow$ .Bc	b	B	6
	B $\longrightarrow$ .c	c	c	7
3	S $\longrightarrow$ c.	ε,b	r(S $\longrightarrow$ c)	
	S $\longrightarrow$ c.B	ε,b	B	8
	B $\longrightarrow$ .c	ε,b	c	7

4	S $\longrightarrow$ aA.b	ε,b	b	10
5	A $\longrightarrow$ b.S	b	S	11
	S $\longrightarrow$ .aAb	b	a	2
	S $\longrightarrow$ .c	b	c	3
	S $\longrightarrow$ .cB	b	c	3
6	A $\longrightarrow$ B.c	b	c	14
7	B $\longrightarrow$ c.	ε,b,c	r(B$\longrightarrow$ c)	
8	S $\longrightarrow$ cB.	ε,b	r(S$\longrightarrow$ cB)	
10	S $\longrightarrow$ aAb.	ε,b	r(S$\longrightarrow$ aAb)	
11	A $\longrightarrow$ bS.	b	r(A $\longrightarrow$ bS)	
14	A $\longrightarrow$ Bc.	b	r(A $\longrightarrow$ Bc)	

11.1 $\varphi ::= Q_a(x) \mid x < y \mid x \in X \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x\, \varphi \mid \exists X\, \varphi$, kde $a \in \Sigma$ je libovolný znak z abecedy, x, y reprezentují proměnné prvního řádu a X reprezentuje proměnnou druhého řádu.

11.3 a) $\neg(y < x), \quad y \leq x, \quad \neg(x < y \vee y < x)$
b) $\forall x\,(x \in X \implies \varphi)$, kde $\forall x\, \psi \equiv \neg(\exists x \neg\psi)$
c) $\exists x\,(x \in X \wedge \varphi)$
d) $\forall y\,(x \leq y)$
e) $\forall y\,(y \leq x)$
f) $(x < y) \wedge \neg\exists z\,(x < z \wedge z < y)$

11.5 a) $\exists x : (Q_a(x) \wedge Q_b(x))$
b) $\forall x : \neg \mathit{first}(x)$
c) $\forall x : (\mathit{first}(x) \wedge Q_a(x)) \wedge \exists y : \mathit{first}(y)$
d) $\forall x : Q_a(x)$
e) $\forall x : Q_a(x) \ \wedge \ \exists y : Q_a(y)$

f) $\exists x : (Q_b(x) \wedge \mathit{last}(x) \ \wedge \ \forall z : (z < x \Longrightarrow Q_a(z)))$
g) $\exists X : (\forall x : (\mathit{first}(x) \Longrightarrow x \in X) \wedge$
$\wedge \forall x \in X : \exists y, z \notin X : (\mathit{succ}(x, y) \ \wedge \ \mathit{succ}(y, z) \ \wedge \ (\mathit{last}(z) \vee \exists v \in X : \mathit{succ}(z, v))))$

11.6 a) $\{a, b\}.\{a\}.\{a, b\}^*$, tj. na druhé pozici je a; b) $\{w \in \Sigma^* \mid w$ má na každé sudé pozici písmeno a$\}$