IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 5 — Zadání

Téma

Vlastnosti relací — relace reflexivní, symetrická, antisymetrikcá, tranzitivní. Ekvivalence na množině a rozklad množiny.

Příklad 1.

Určete, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, antisymetrické resp. tranzitivní. Určete, které z relací jsou ekvivalence.

a) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{1,2,3\}$.
b) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$.
c) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{1,2,3,4\}$.
d) $R = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$
e) $R = \emptyset$
f) $R = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$
g) $R = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 5|m \text{ a } 7|n\}$
h) $R = \{(n, n+k) \mid n, k \in \mathbb{N}\}$
i) $R = \{(n, n+k) \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$
j) $R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \neq n\}$

Příklad 2.

Pro každou z množin $M_0 = \emptyset$, $M_1 = \{a\}$ a $M_3 = \{a,b,c\}$ určete počet relací $R \subseteq M_i \times M_i$, které jsou

a) reflexivní
b) symetrické
c) tranzitivní

Příklad 3.

Nechť A, B jsou množiny, $f : A \to B$ funkce. Uvažujme relaci $R \subseteq A \times A$ definovanou předpisem

$$R = \{(x,y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$$

Rozhodněte, zda je tato relace ekvivalencí a své tvrzení dokažte.

Příklad 4.

Nechť A, B jsou množiny, $S \subseteq A \times B$ funkce. Uvažujme relaci $R \subseteq B \times B$ definovanou předpisem

$$R = \{(x,y) \in B \times B \mid \exists\, a \in A : (a,x) \in S \wedge (a,y) \in S\}$$

Rozhodněte, zda je tato relace ekvivalencí a své tvrzení dokažte.

Příklad 5.

Nechť $R, S \subseteq M \times M$ jsou antisymetrické relace. Rozhodněte, zda platí, že $S \circ R$ a R^{-1} jsou antisymetrické relace a svá tvrzení dokažte.

Příklad 6.

Rozhodněte, které z následujících systémů podmnožin množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jsou rozkladem množiny M. U rozkladů vypište výčtem prvků příslušné ekvivalence.

a) $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5, 6\}\}$
b) $\{\{1, 2, 6\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$
c) $\{\{2, 4, 6\}, \{1, 5\}\}$
d) $\{\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}\}$

Příklad 7.

Nechť A je množina. Uvažme systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny 2^A, $\mathcal{S} = \{M_a \mid a \in A\}$, kde pro $a \in A$ je $M_a = \{M \subseteq A \mid a \in M\}$.
Určete, zda se jedná o rozklad množiny 2^A, své tvrzení dokažte, a pokud ano, definujte příslušnou ekvivalenci.

Příklad 8.

Nechť A je množina. Definujme relaci $R \subseteq 2^A \times 2^A$ následovně: pro každé $X, Y \in 2^A$ platí $(X, Y) \in R$ právě tehdy, když existuje bijekce $f : X \to Y$.
Dokažte, že R je ekvivalence a nalezněte třídy ekvivalence příslušného rozkladu.

Příklad 9.

Nechť A, B jsou množiny, $f : A \to B$ funkce. Definice funkce f se rozšiřuje na množiny podle následujícího předpisu

$$f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$$

(Přestože funkce označujeme stejně, jedná se vlastně o dvě různé funkce. Původní $f : A \to B$ a nově definovanou $f' : 2^A \to 2^B$. Stejné označení není na závadu — typ funkce, kterou máme na mysli, je jednoznačně určen tím, na jaký argument ji aplikujeme.)
Nechť A je množina. Definujme množiny $\mathcal{M}_M \subseteq A^A$, kde $M \subseteq A$, a systém $\mathcal{S} \subseteq 2^{A^A}$ následovně:

$$\mathcal{M}_M = \{f \mid f(A) = M\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathcal{M}_M \mid \emptyset \neq M \subseteq A\}$$

Dokažte, že $\mathcal{S}$ je rozklad na A^A a určete příslušnou relaci ekvivalence. Byla by to pravda i v případě, kdy bychom uvažovali obecné funkce $f : A \to B$?
Nápověda: Pečlivě si uvědomujte, se kterou strukturou v kterém okamžiku pracujete. Například $\mathcal{S}$ je množina množin funkcí z A do A.