IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 7 — Zadání

Téma

Relace, vlastnosti relací. Ekvivalence. Uspořádání. Vhodně definované vlastnosti relací. Uzávěry relací.

Příklad 1.

Nechť $\mathcal{F} \subseteq 2^{A \times B}$ je množina všech parciálních funkcí z A do B. Udejte příklad množin A a B a funkcí $e, f, g, h \in \mathcal{F}$ takových, že v uspořádané množině $(\mathcal{F}, \subseteq)$ funkce e pokrývá funkce f a g a funkce f je pokrývána funkcemi e a h.

Příklad 2.

Rozhodněte, zda jsou následující vlastnosti binárních relací vhodně definované, a svá tvrzení dokažte. U vlastností, které nejsou vhodně definovány, ověřte, zda splňují alespoň jednu z podmínek kladených na vhodně definované vlastnosti.

a) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R má *hvězdičky před očima*, jestliže pro každé $x \in M$ platí: $(x, x) \in R$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$ pro všechna $y \in M$.

b) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *odpudivá*, jestliže pro každé $x, y, z \in M$ platí: pokud $(x, y) \in R$ a $(x, z) \in R$, potom $(y, z) \in R$.

c) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *přitažlivá*, jestliže pro každé $x, y \in M$ platí: pokud $(x, y) \in R$, potom existuje $z \in M$ takové, že $(x, z) \in R$ a $(y, z) \in R$.

d) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *divná*, jestliže $R \circ R \subseteq \mathrm{id}_M$.

e) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *parciální funkcí* z M do M jestliže pro každé $x, y, z \in M$ platí: pokud $(x, y) \in R$ a $(x, z) \in R$, potom $y = z$. (Dokažte také, že tato definice je konzistentní s obecnou definicí parciální funkce.)

f) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *totální funkcí* z M do M jestliže pro každé $x \in M$ existuje $y \in M$ takové, že $(x, y) \in R$ a pro každé $x, y, z \in M$ platí: pokud $(x, y) \in R$ a $(x, z) \in R$, potom $y = z$. (Dokažte také, že tato definice je konzistentní s obecnou definicí totální funkce.)

Příklad 3.

Určete reflexivní, symetrický, tranzitivní, reflexivní a tranzitivní, resp. reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr následujících relací. Nestačí jen opsat definice. Podejte přesné charakterizace prvků jednotlivých uzávěrů.

a) $R = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
b) $R = \{(k + 2, k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
c) $R = \{(a, b) \mid b \mid a\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
d) $R = \{(k, k^2) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
e) $R = \{(a, b) \mid a \leq b + 3\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

f) $R = \{(f, g) \mid \forall\, x \in \mathbb{N}_0 : g(x+1) = f(x)\} \subseteq {\mathbb{N}_0}^{\mathbb{N}_0} \times {\mathbb{N}_0}^{\mathbb{N}_0}$
g) Nechť $\mathcal{F} \subseteq 2^{A \times A}$ je množina všech parciálních funkcí z A do A. $R = \{(f, g) \mid f \cup g \in \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ Jak by se výsledky změnily, kdybychom uvažovali obecné parciální funkce z A do B?
h) Nechť $\mathcal{F} \subseteq 2^{A \times A}$ je množina všech parciálních funkcí z A do A. $R = \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid \mid f \cup g \in \mathcal{F}\} \subseteq 2^{A \times A} \times 2^{A \times A}$. Jak by se výsledky změnily, kdybychom uvažovali obecné parciální funkce z A do B?

Příklad 4.

Dokažte, nebo uveďte protipříklad pro následující tvrzení.
a) Jestliže R, S jsou uspořádání na M, potom také $R \circ S$ je uspořádání na M.
b) Jestliže R je uspořádání na M, potom také $R^{-1} \cap R$ je uspořádání na M.