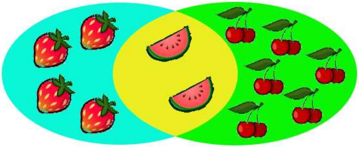
3 Množiny a množinové operace

V přehledu matematických formalismů informatiky se v této lekci zaměříme na první základní „datový typ“ matematiky, tj. na množiny. O množinách jste sice zajisté slyšeli už na základní škole, ale podstatou našeho předmětu je uvést povětšinou neformálně známé pojmy na patřičnou formální úroveň nutnou pro teoretické základy informatiky.



Stručný přehled lekce

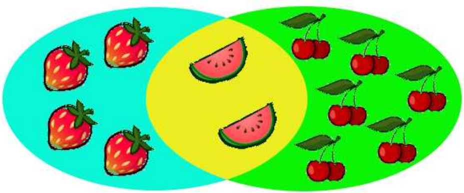
* Uvedení množin a operací množinového kalkulu.
* Uspořádané k-tice a kartézský součin.
* Porovnávání a určení množin. Princip inkluze a exkluze.
* Posloupnosti a rekurentní vztahy.

3.1 Pojem množiny

Co je vlastně množina?

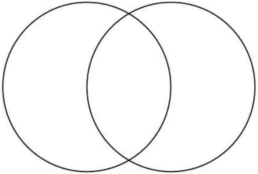
Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď...

- Naivní pohled: „*Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.*“



- Příklady zápisu množin $\emptyset$, $\{a, b\}$, $\{b, a\}$, $\{a, b, a\}$, $\{\{a, b\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, $\{x \mid x \text{ je liché přirozené číslo}\}$.

Co je ale pak prvek?



Tady pozor, pojem prvku sám o sobě nemá matematický význam, svého významu totiž nabývá pouze ve spojení „*být prvkem množiny*“. Prvky množiny tak může být cokoliv, mimo jiné i další množiny.

Relativitu významu vztahu „prvek–množina“ si můžeme přiblížit třeba na vztahu „podřízený–nadřízený“ z běžného pracovního života. Tam také nemá smysl jen říkat, že je někdo podřízeným, aniž řekneme také jeho nadřízeného. Přitom i vedoucí je někomu ještě podřízený a naopak i ten poslední podřízený pracovník může být pánem třeba svého psa. Podobně je tomu s množinou jako „nadřízenou“ svých prvků.

Ale přece jenom... v dobře definovaném kontextu lze (omezeně) mluvit o prvcích jako samostatných entitách. Formálně se například jedná o *prvky* pevně dané nosné množiny.

Zápis množiny

Značení množin a jejich prvků:

- $x \in M$ „x je *prvkem* množiny M“,
- $\emptyset$ je *prázdná* množina $\{\}$.

Některé vlastnosti vztahu „být prvkem“ jsou

- $a \in \{a, b\}$, $a \notin \{\{a, b\}\}$, $\{a, b\} \in \{\{a, b\}\}$, $a \notin \emptyset$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \notin \emptyset$,
- rovnost množin dle prvků $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, a\}$, $\{a, b\} \neq \{\{a, b\}\}$.

Značení: Počet prvků (*mohutnost*) množiny A zapisujeme $|A|$.

- $|\emptyset| = 0$, $|\{\emptyset\}| = 1$, $|\{a, b, c\}| = 3$, $|\{\{a, b\}, c\}| = 2$.

Jednoduché srovnání množin

Vztah „být prvkem množiny“ nám přirozeně podává i způsob porovnávání množin mezi sebou. Jedná se o klíčovou část, čili hlavní nástroj teorie množin.

Definice: Množina A je *podmnožinou* množiny B, právě když každý prvek A je prvkem B. Píšeme $A \subseteq B$ nebo obráceně $B \supseteq A$.

Říkáme také, že se jedná o *inkluzi*. □

- Platí $\{a\} \subseteq \{a\} \subseteq \{a,b\} \not\subseteq \{\{a,b\}\}$, $\quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,
- $A \subsetneq B$ právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$ $\quad$ (A je *vlastní* podmnožinou B).□

Z naivní definice množiny pak přímo vyplývá následující:

Definice: Dvě množiny jsou si *rovny* $A = B$ právě když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

- Podle naivní definice jsou totiž množiny A a B stejné, mají-li stejné prvky.□
- Důkaz rovnosti množin $A = B$ má obvykle dvě části:
  Odděleně se dokáží inkluze $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

Ukázky nekonečných množin

Značení: Běžné číselné množiny v matematice jsou následující

* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel,
* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množina celých čísel,
* $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina celých kladných čísel,
* $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel (zlomků).
* $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. □

Tyto uvedené číselné množiny jsou vesměs *nekonečné*, na rozdíl od konečných množin uvažovaných v předchozím „naivním“ pohledu. □

Pojem nekonečné množiny se přímo v matematice objevil až teprve v 19. století a bylo s ním spojeno několik paradoxů ukazujících, že naivní pohled na teorii množin pro nekonečné množiny nedostačuje. My se k problematice nekonečných množin, Kantorově větě a Russelovu paradoxu vrátíme v závěru našeho předmětu v Lekci 12.

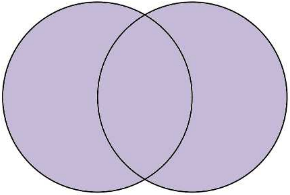
3.2 Množinové operace

Sjednocení a průnik

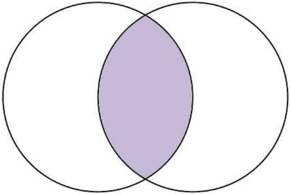
Definice 3.1. **Sjednocení** $\cup$ **a průnik** $\cap$ dvou množin A, B definujeme

$$\begin{aligned} A\cup B &= \{x \mid x\in A \text{ nebo } x\in B\}\square\,, \\ A\cap B &= \{x \mid x\in A \text{ a současně } x\in B\}\,.\square \end{aligned}$$

$A\cup B$



$A\cap B$



- Příklady $\{a,b,c\}\cup\{a,d\}=\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c\}\cap\{a,d\}=\{a\}$.

Sjednocení a průnik

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}\,, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}\,. \end{aligned}$$

- Vždy platí „distributivita“ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ □
- a také „asociativita“ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (stejně pro $\cup$) a „komutativita“ $A \cap B = B \cap A$ (stejně pro $\cup$). □

Definice: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí I rozšířeně

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro nějaké } i \in I\}\square\,, \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro každé } i \in I\}\,.\square \end{aligned}$$

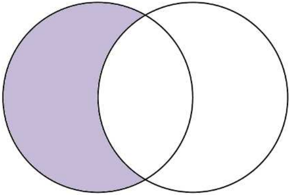
- Nechť $A_i = \{2 \cdot i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ je množina všech sudých přirozených čísel.□
- Nechť $B_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = \emptyset$.

Množinový rozdíl

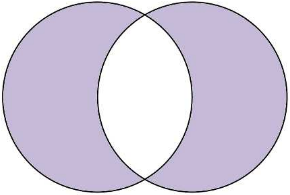
Definice 3.2. **Rozdíl $\setminus$ a symetrický rozdíl Δ** dvou množin A, B definujeme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\}, \\ A \,\Delta\, B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

$A \setminus B$



$A \Delta B$



- Příklady $\{a,b,c\} \setminus \{a,b,d\} = \{c\}$, $\{a,b,c\} \Delta \{a,b,d\} = \{c,d\}$.
- Vždy platí například $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ apod.

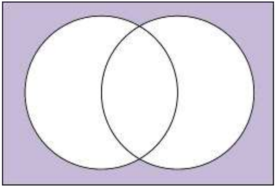
Definice: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí konečné I

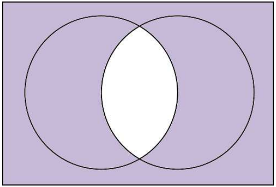
$$\Delta_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro lichý počet } i \in I\}.$$

Doplněk k množině

Definice: Nechť $A \subseteq M$. *Doplňkem A vzhledem k M* je množina $\overline{A} = M \setminus A$.

- Jedná se o poněkud specifickou operaci, která musí být vztažena vzhledem k nosné množině M !
  Je-li $M = \{a, b, c\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \{c\}$. Je-li $M = \{a, b\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \emptyset$. □
- Vždy pro $A \subseteq M$ platí $\overline{\overline{A}} = A$ („dvojí" doplněk). □
- Vždy pro $A, B \subseteq M$ platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
  (Viz Vennovy diagramy.)





Uspořádané dvojice a kartézský součin

Definice: *Uspořádaná dvojice* (a, b) je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Fakt: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$.

- Co je dle definice (a, a)? $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$.

Definice 3.3. **Kartézský součin** dvou množin A, B definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z A a B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}\,.$$

- Příklady $\{a, b\} \times \{a\} = \{(a, a), (b, a)\}$,
  $\{c, d\} \times \{a, b\} = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$.
- Platí $\emptyset \times X = \emptyset = X \times \emptyset$ pro každou množinu X.
- Jednoduchá mnemotechnická pomůcka říká $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Skládání součinu

Definice: Pro $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou k-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ ind.

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, a_2, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, a_2, \cdots, a_i), a_{i+1})$. □

Fakt: Platí $(a_1, \cdots, a_k) = (b_1, \cdots, b_k)$ právě když $a_i = b_i$ pro každé $1 \le i \le k$. □

Definice *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \le i \le k\}. \square$$

- Například $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Co je A^0? □ $\{\emptyset\}$, neboť jediná uspořádaná 0-tice je právě prázdná $\emptyset$.

Poznámka: Podle uvedené definice není kartézský součin asociativní, tj. obecně nemusí platit, že $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$. □

V matematické praxi je někdy výhodnější uvažovat upravenou definici, podle níž součin asociativní je. Pro účely této přednášky není podstatné, k jaké definici se přikloníme. Prezentované definice a věty „fungují“ pro obě varianty.

Potenční množina

Definice 3.4. **Potenční množina** množiny A,
neboli množina všech podmnožin, je definovaná vztahem

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}\,.$$

- Platí například $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,
- $2^\emptyset = \{\emptyset\}$, $\quad 2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- $2^{\{a\}\times\{a,b\}} = \{\emptyset, \{(a,a)\}, \{(a,b)\}, \{(a,a),(a,b)\}\}$.

Věta 3.5. *Počet prvků potenční množiny splňuje* $|2^A| = 2^{|A|}$.

Důkaz: Stručně indukcí podle $|A|$: Pro $A = \emptyset$ platí $|2^A| = |\{\emptyset\}| = 1$.

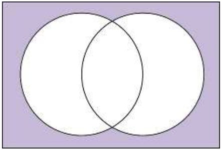
Pro každý další prvek $b \not\in A$ rozdělíme všechny podmnožiny $A \cup \{b\}$ „napolovic“ na ty neobsahující b a na ty obsahující b, tudíž

$$\left|2^{A\cup\{b\}}\right| = 2 \cdot \left|2^A\right| = 2^{|A|+1} = 2^{|A\cup\{b\}|}\,.$$

□

3.3 Porovnávání a určení množin

Věta 3.6. *Pro každé dvě množiny* $A, B \subseteq M$ *platí* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. □



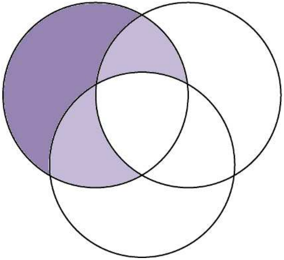
Důkaz v obou směrech rovnosti (viz ilustrační obrázek).

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$: □
  - Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A \cup B}$, právě když $x \notin A \cup B$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$.
  - To znamená $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. □
- $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:
  - Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, právě když $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$. □
  - To znamená $x \notin A \cup B$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A \cup B}$.

□

Věta 3.7. *Pro každé tři množiny A, B, C platí*

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$



Důkaz (viz ilustrační obrázek).

- $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$:
  - ∗ Je-li $x \in A \setminus (B \cap C)$, pak $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, neboli $x \notin B$ nebo $x \notin C$.
  - ∗ Pro první možnost máme $x \in (A \setminus B)$, pro druhou $x \in (A \setminus C)$.
- Naopak $A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$:
  - ∗ Je-li $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, pak $x \in (A \setminus B)$ nebo $x \in (A \setminus C)$.
  - ∗ Pro první možnost máme $x \in A$ a zároveň $x \notin B$, z čehož plyne $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, a tudíž $x \in A \setminus (B \cap C)$.
  - ∗ Druhá možnost je analogická.

□

Charakteristický vektor (pod)množiny

V případech, kdy všechny uvažované množiny jsou podmnožinami nějaké konečné *nosné množiny* X, což není neobvyklé v programátorských aplikacích, s výhodou využijeme následující reprezentaci množin.

Definice: Mějme nosnou množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pro $A \subseteq X$ definujeme *charakteristický vektor* χ_A jako

$$\chi_A = (c_1, c_2, \ldots, c_n),\ \text{kde } c_i = 1 \text{ pro } x_i \in A \text{ a } c_i = 0 \text{ jinak.} \square$$

- Platí $A = B$ právě když $\chi_A = \chi_B$.
- Množinové operace jsou realizovány „bitovými funkcemi"
  sjednocení $\sim$ OR, průnik $\sim$ AND, symetrický rozdíl $\sim$ XOR.

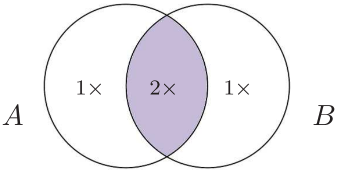
Princip inkluze a exkluze

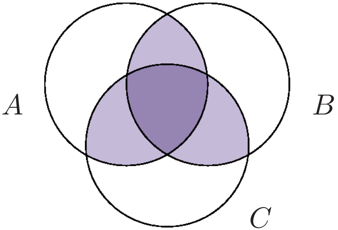
Tento důležitý a zajímavý kombinatorický princip je někdy také nazýván „princip *zapojení a vypojení*“.

Věta 3.8. *Počet prvků ve sjednocení dvou či tří množin spočítáme:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \square$$





Všimněte si, že větu lze stejně tak využít k výpočtu počtu prvků v průniku množin...

Příklad 3.9. *Z* 1000 *televizí jich při první kontrole na výrobní lince má* 5 *vadnou obrazovku,* 10 *je poškrábaných a* 12 *má jinou vadu. Přitom* 3 *televize mají současně všechny tři vady a* 4 *jiné jsou poškrábané a mají jinou vadu.*
Kolik televizí je celkem vadných?

Řešení: Dosazením $|A| = 5$, $|B| = 10$, $|C| = 12$, $|A \cap B \cap C| = 3$, $|A \cap B| = 3 + 0$, $|A \cap C| = 3 + 0$, $|B \cap C| = 3 + 4$ do Věty 3.8 zjistíme výsledek 17. □

Poznámka. Jen stručně, bez důkazu a bližšího vysvětlení, si uvedeme obecnou formu principu inkluze a exkluze:

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

(Jeho znalost nebude v předmětu vyžadována.)

3.4 Posloupnosti a rekurentní vztahy

Definice: Uspořádaná k-tice je také nazývána *konečnou posloupností* délky k.

- Nekonečná posloupnost zobecňuje toto pojetí na „nekonečná“ k. □
- *Nekonečná posloupnost* p je zobrazením z $\mathbb{N}$ do svého oboru hodnot.
- Mimo „funkčního“ zápisu $p(n)$ často používáme „indexovou“ formu p_n. □

Poznámka: Oborem hodnot posloupnosti obvykle bývá nějaká číselná množina, ale může to být i jakákoliv jiná množina. □

Také def. obor posl. může začínat od nuly nebo i od jedničky, jak je v aplikacích potřeba.

- Příklady posloupností:
  - $p_0 = 0,\ p_1 = 2, \dots, p_i = 2i, \dots$ je posloupnost sudých nezáporných čísel. □
  - $3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141, \dots$ je posloupnost postupných dekadických rozvojů π.
  - $1,\ -1,\ 1,\ -1, \dots$ je posloupnost určená vztahem $p_i = (-1)^i$, $i \geq 0$. □
  - Pokud chceme stejnou posloupnost $1,\ -1,\ 1,\ -1, \dots$ zadat jako q_i, $i \geq 1$, tak ji určíme vzorcem $q_i = (-1)^{i-1}$.

Rekurentní definice posloupnosti

Slovem rekurentní označujeme takové definice (či popisy), které se v jistých bodech odvolávají samy na sebe.

(Už jste se setkali s „rekurzí“ při programování? A víte, co znamená?) □

Ukázky **rekurentních vztahů**:

- Zadáme-li posloupnost p_n vztahy $p_0 = 1$ a $p_n = 2p_{n-1}$ pro $n > 0$, pak platí $p_n = 2^n$ pro všechna n. □

- Obdobně můžeme zadat posloupnost q_n vztahy $q_1 = 1$ a $q_n = q_{n-1} + n$ pro $n > 1$. Potom platí $q_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ pro všechna n.

  Uměli byste toto dokázat indukcí? □

- Známá Fibonacciho posloupnost je zadaná vztahy $f_1 = f_2 = 1$ a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n > 2$.

Příklad 3.10. *Posloupnost f je zadaná rekurentní definicí*

$$f(0) = 3 \quad a \quad f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$$

pro všechna přirozená n. Určete hodnotu $f(n)$ vzorcem v závislosti na n. □

Řešení: V první fázi řešení takového příkladu musíme nějak „uhodnout“ hledaný vzorec pro $f(n)$. Jak? Zkusíme vypočítat několik prvních hodnot a uvidíme...

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot f(0) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ f(2) &= 2 \cdot f(1) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \\ f(3) &= 2 \cdot f(2) + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 \\ f(4) &= 2 \cdot f(3) + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63 \square \end{aligned}$$

Nepřipomínají nám tato čísla něco? Co třeba posloupnost $8-1, 16-1, 32-1, 64-1 \ldots$? Bystrému čtenáři se již asi podařilo uhodnout, že půjde o mocniny dvou snížené o 1. Přesněji, $\boldsymbol{f(n) = 2^{n+2} - 1}$. □

Ve druhé nesmíme ale zapomenout správnost našeho „věštění“ dokázat, nejlépe matematickou indukcí podle n. □