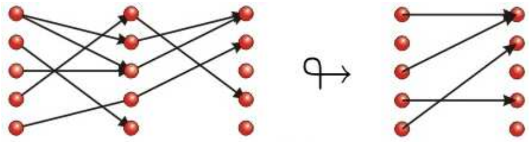
6 Funkce a skládání, Induktivní definice

Vraťme se nyní k látce Lekce 4 z pohledu funkcí a jejich skládání a inverzí.



Kde jste se již intuitivně se skládáním funkcí setkali – jak například spočítáte na kalkulačce výsledek složitějšího vzorce? A jinde?

Na závěr látky o relacích a funkcích se stručně podíváme na problematiku induktivních definic množin a funkcí a uzávěrů vlastností relací. □

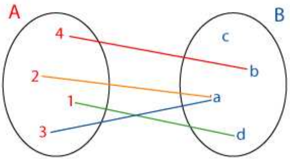
Stručný přehled lekce

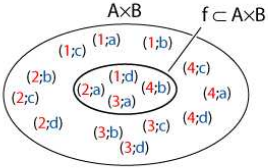
* Přehled základních vlastností funkcí, inverze.
* Skládání funkcí (coby relací), speciálně aplikováno na permutace.
* Induktivní definice množin a funkcí; uzávěry vlastností relací.

Relace a funkce, zopakování

- *Relace* mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu
$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \,.$$
Pokud $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *$k$-ární relaci R na A.* □

- *(Totální) funkce* z množiny A do množiny B je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$.

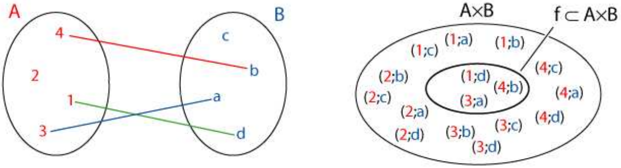




□

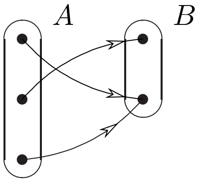
  * Množina A se nazývá *definiční obor* a množina B *obor hodnot* funkce f. Funkcím se také říká *zobrazení*.
  * Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$. Zápis $f : A \to B$ říká, že f je funkce s def. oborem A a oborem hodnot B.

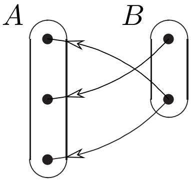
- Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z A do B.



- *Inverzní relace* k binární relaci R se značí R^{-1} a je definována takto:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

R: 

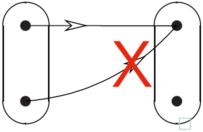
$\boldsymbol{R^{-1}}$: 

R^{-1} je tedy relace mezi B a A.

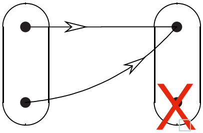
6.1 Vlastnosti funkcí

Definice 6.1. **Funkce** (případně parciální funkce) $f : A \to B$ je

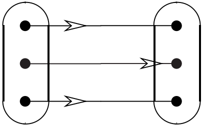
- *injektivní* (nebo také prostá) právě když pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$;



- *surjektivní* (nebo také „na“) právě když pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$;



- *bijektivní* (vzáj. jednoznačná) právě když je injektivní a souč. surjektivní. □



Následují jednoduché ukázky vlastností funkcí.

- Funkce $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je surjektivní, ale není prostá. □
- Funkce $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ daná předpisem
$$g(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{jestliže } x < 0, \\ 2x & \text{jinak} \end{cases}$$
je bijektivní. □
- Funkce $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ je bijektivní. □
- Funkce $\emptyset : \emptyset \to \{a, b\}$ je injektivní, ale není surjektivní. □

Příklad 6.2. *Dokázali byste nalézt jednoduše (tj. „hezky“) vypočitatelnou bijektivní funkci $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$?* □

□

Příklad 6.3. *Pro jaké hodnoty parametrů a, b je funkce $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx$ z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ injektivní či surjektivní?*

□

Inverze funkce

Inverze funkce je dána definicí inverze relace z Oddílu 4.4.

Příklady inverzí pro běžné funkce:

- Inverzí bijektivní funkce $f(x) = x + 1$ na $\mathbb{Z}$ je funkce $f^{-1}(x) = x - 1$.□
- Inverzí prosté funkce $f(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$ je parciální funkce $f^{-1}(x) = \ln x$.□
- Funkce $g(x) = x \bmod 3$ není prostá na $\mathbb{N}$, a proto její inverzí je „jen“ relace $g^{-1} = \{(a, b) \mid a = b \bmod 3\}$.
  Konkrétně $g^{-1} = \{(0, 0), (0, 3), (0, 6), \ldots, (1, 1), (1, 4), \ldots, (2, 2), (2, 5), \ldots\}$.□

Tvrzení 6.4. *Mějme funkci $f : A \to B$. Pak její inverzní relace f^{-1} je*

a) parciální funkce právě když f je prostá, □

b) funkce právě když f je bijektivní. □

Tvrzení 6.5. *Je-li inverzní relace f^{-1} funkce f taktéž parciální funkcí, tak platí $f^{-1}(f(x)) = x$ pro všechna x z definičního oboru.*

6.2 Skládání funkcí, permutace

Fakt: Mějme zobrazení (funkce) $f : A \to B$ a $g : B \to C$. Pak jejich *složením* coby relací v tomto pořadí vznikne zobrazení $(g \circ f) : A \to C$ definované

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))\,. \square$$

- Jak například na běžné kalkulačce vypočteme hodnotu funkce $\sin^2 x$? □
  Složíme (v tomto pořadí) „elementární“ funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$. □
- Jak bychom na „elementární“ funkce rozložili aritmetický výraz $2\log(x^2+1)$? □
  Ve správném pořadí složíme funkce $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x+1$, $f_3(x) = \log x$ a $f_4(x) = 2x$. □
- A jak bychom obdobně vyjádřili složením funkcí aritmetický výraz $\sin x + \cos x$?
  Opět je odpověď přímočará, vezmeme „elementární“ funkce $g_1(x) = \sin x$ a $g_2(x) = \cos x$, a pak je „složíme“ další funkcí $h(x,y) = x+y$. □
  Vidíme však, že takto pojaté „skládání“ už nezapadá hladce do našeho zjednodušeného formalismu skládání relací.

Skládání permutací

Definice: Nechť *permutace* π množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ je určena seřazením jejích prvků $(p_1,\ldots,p_n)$. Pak π je zároveň bijektivním zobrazením $\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ definovaným předpisem $\pi(i) = p_i$. □

Tudíž lze permutace *skládat jako relace* podle Definice 4.7. □

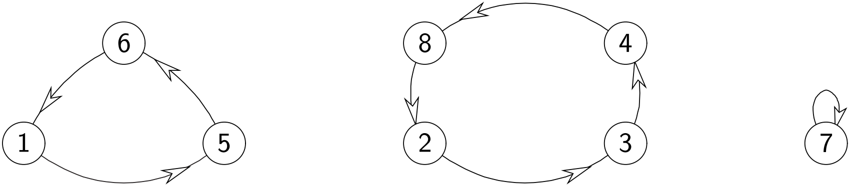
Poznámka: Všechny permutace množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ spolu s operací skládání tvoří grupu, zvanou symetrická grupa S_n.

Permutační grupy (podgrupy symetrické grupy) jsou velice důležité v algebře, neboť každá konečná grupa je vlastně isomorfní některé permutační grupě. □

Příkladem permutace vyskytujícím se v programátorské praxi je třeba zobrazení $i \mapsto (i+1) \mod n$ ("inkrement"). □Často se třeba lze setkat (aniž si to mnohdy uvědomujeme) s permutacemi při indexaci prvků polí.

Cykly permutací

V kontextu pohledu na funkce a jejich skládání coby relací si zavedeme jiný, názornější, způsob zápisu permutací – pomocí jejich cyklů.



□

Definice: Nechť π je permutace na množině A. *Cyklem v* π rozumíme posloupnost $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ různých prvků A takovou, že $\pi(a_i) = a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $\pi(a_k) = a_1$. □

- Jak název napovídá, v zápise cyklu $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ není důležité, kterým prvkem začneme, ale jen dodržení cyklického pořadí. Cyklus v permutaci může mít i jen jeden prvek (zobrazený na sebe).
- Například permutace $(5, 3, 4, 8, 6, 1, 7, 2)$ je zakreslena svými cykly výše.

Reprezentace permutací jejich cykly

Věta 6.6. *Každou permutaci π na konečné množině A lze zapsat jako složení cyklů na disjunktních podmnožinách (rozkladu) A.* □

Důkaz: Vezmeme libovolný prvek $a_1 \in A$ a iterujeme zobrazení $a_2 = \pi(a_1)$, $a_3 = \pi(a_2)$, atd., až se dostaneme „zpět" k $a_{k+1} = \pi(a_k) = a_1$. Proč tento proces skončí? Protože A je konečná a tudíž ke zopakování některého prvku a_{k+1} musí dojít. Nadto je π prostá, a proto nemůže nastat $\pi(a_k) = a_j$ pro $j > 1$. Takto získáme první cyklus $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$. □

Induktivně pokračujeme s hledáním dalších cyklů ve zbylé množině $A' = A \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, dokud nezůstane prázdná. V tomto indukčním kroku si musíme uvědomit, že π omezené na nosnou množinu A' je stále permutací podle definice. □ □

Značení permutace jejími cykly: Nechť se permutace π podle Věty 6.6 skládá z cyklů $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_l \rangle$ až třeba $\langle z_1, \dots, z_m \rangle$. Pak zapíšeme

$$\boldsymbol{\pi = (\, \langle a_1, \dots, a_k \rangle \, \langle b_1, \dots, b_l \rangle \dots \langle z_1, \dots, z_m \rangle \,)\,.}$$

Příklad 6.7. *Ukázka skládání permutací daných svými cykly.*

Vezměme 7-prvkovou permutaci $\pi = (3, 4, 5, 6, 7, 1, 2)$. Ta se skládá z jediného cyklu $\langle 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6\rangle$. Jiná permutace $\sigma = (5, 3, 4, 2, 6, 1, 7)$ se rozkládá na tři cykly $\langle 1, 5, 6\rangle$, $\langle 2, 3, 4\rangle$ a $\langle 7\rangle$. □

Nyní určíme složení $\sigma \circ \pi$ těchto dvou permutací (už přímo v zápisu cykly):

$$(\langle 1, 5, 6\rangle\langle 2, 3, 4\rangle\langle 7\rangle) \circ (\langle 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6\rangle) = (\langle 1, 4\rangle\langle 2\rangle\langle 3, 6, 5, 7\rangle)$$

(Nezapomínejme, že první se ve složení aplikuje pravá permutace!) □

Postup skládání jsme použili následovný:

* 1 se zobrazí v permutaci vpravo na 3 a pak vlevo na 4. □
* Následně 4 se zobrazí na 6 a pak na 1. Tím „uzavřeme“ první cyklus $\langle 1, 4\rangle$. □
* Dále se 2 zobrazí na 4 a pak hned zpět na 2, tj. má samostatný cyklus. □
* Zbylý cyklus $\langle 3, 6, 5, 7\rangle$ určíme analogicky.

□

6.3 Induktivní definice množin a funkcí

Přímým zobecněním dřívějších rekurentních definic je následující koncept.

Definice 6.8. **Induktivní definice** množiny.
Jedná se obecně o popis (nějaké) množiny M v následujícím tvaru:

- Je dáno několik pevných (*bázických*) prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$. □
- Je dán soubor *induktivních pravidel* typu

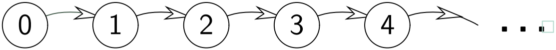
  Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $y \in M$.

  V tomto případě je y typicky funkcí $y = f_i(x_1, \ldots, x_\ell)$. □

Pak naše *induktivně definovaná množina* M je určena jako nejmenší (inkluzí) množina vyhovující těmto pravidlům.

Několik ukázek...

- Pro nejbližší příklad induktivní definice se obrátíme na množinu všech přirozených čísel, která je formálně zavedena následovně.
  - $0 \in \mathbb{N}$
  - Je-li $i \in \mathbb{N}$, pak také $i + 1 \in \mathbb{N}$.



- Pro každé $y \in \mathbb{N}$ můžeme definovat jinou množinu $M_y \subseteq \mathbb{N}$ induktivně:
  - $y \in M_y$
  - Jestliže $x \in M_y$ a $x + 1$ je liché, pak $x + 2 \in M_y$.

  Pak například $M_3 = \{3\}$, nebo $M_4 = \{4 + 2i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- Dalším příkladem induktivní definice je už známé zavedení výrokových formulí z Oddílu 1.5. Uměli byste teď přesně říci, co tam byly bázické prvky a jaká byla induktivní pravidla?

Jednoznačnost induktivních definic

Definice: Řekneme, že daná induktivní definice množiny M je *jednoznačná*, právě když každý prvek M lze odvodit z bázických prvků pomocí induktivních pravidel právě jedním způsobem. □

- Definujme například množinu $M \subseteq \mathbb{N}$ induktivně takto:
  - $2, 3 \in M$
  - Jestliže $x, y \in M$ a $x \leq y$, pak také $x^2 + y^2$ a $x \cdot y$ jsou prvky M.

  Proč tato induktivní definice není jednoznačná? □Například číslo $8 \in M$ lze odvodit způsobem $8 = 2 \cdot (2 \cdot 2)$, ale zároveň zcela jinak $8 = 2^2 + 2^2$. □

- V čem tedy spočívá důležitost jednoznačných induktivních definic množin? Je to především v dalším možném využití induktivní definice množiny jako „základny“ pro odvozené vyšší definice, viz následující.

Definice 6.9. **Induktivní definice funkce** z induktivní množiny.
Nechť množina M je dána jednoznačnou induktivní definicí. Pak říkáme, že funkce $\mathcal{F} : M \to X$ je definována *induktivně* (vzhledem k induktivní definici M), pokud je řečeno:

- Pro každý z bázických prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ je určeno $\mathcal{F}(a_i) = c_i$. □
- Pro každé induktivní pravidlo typu

  "Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $f(x_1, \ldots, x_\ell) \in M$"

  je definováno

  $\boldsymbol{\mathcal{F}\big(f(x_1, \ldots, x_\ell) \big)}$ na základě hodnot $\boldsymbol{\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_\ell)}$. □

Ilustrujme si induktivní definici funkce dětskou hrou na „tichou poštu“. Definičním oborem je řada sedících hráčů, kde ten první je bázickým prvkem a každý následující (mimo posledního) odvozuje hráče sedícího hned za ním jako další prvek hry.

Hodnotou bázického prvku je první (vymyšlené) posílané slovo. Induktivní pravidlo pak následujícímu hráči přiřazuje slovo, které je odvozeno ze („zkomolením“) slova předchozího hráče. Výsledkem hry pak je hodnota–slovo posledního hráče.

Pro další příklad se podívejme třeba do manuálu unixového příkazu `test EXPRESSION`:

```
EXPRESSION is true or false and sets exit status.  It is one of:
 ( EXPRESSION )                 EXPRESSION is true
 ! EXPRESSION                   EXPRESSION is false
 EXPRESSION1 -a EXPRESSION2     both EXPRESSION1 and EXPRESSION2 are true
 EXPRESSION1 -o EXPRESSION2     either EXPRESSION1 or EXPRESSION2 is true
 [-n] STRING                    the length of STRING is nonzero
 STRING1 = STRING2              the strings are equal
   ......
```

□

No, poněkud problematická je otázka jednoznačnosti této definice – jednoznačnost není vynucena (jen umožněna) syntaktickými pravidly, jinak je pak dána nepsanými konvencemi implementace příkazu.

To je pochopitelně z matematického hlediska velmi špatně, ale přesto jde o pěknou ukázku z praktického života informatika.

Induktivní definice se „strukturální“ indukcí

Příklad 6.10. *Jednoduché aritmetické výrazy a jejich význam.*

Nechť je dána abeceda $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\odot,\oplus,(,)\}$. Definujme množinu *jednoduchých výrazů* $SExp \subseteq \Sigma^*$ induktivně takto:

- Dekadický zápis každého přirozeného čísla **n** je prvek $SExp$. □
- Jestliže $x,y \in SExp$, pak také $(x)\odot(y)$ a $(x)\oplus(y)$ jsou prvky $SExp$. □
- Jak vidíme, díky nucenému závorkování je tato induktivní definice jednoduchých výrazů (nikoliv jejich „hodnot“) jednoznačná.

Tímto jsme aritmetickým výrazům přiřadili jejich „formu“, tedy *syntaxi*. □

Pro přiřazení „významu“, tj. *sémantiky* aritmetického výrazu, následně definujme funkci $\mathit{Val}: SExp \to \mathbb{N}$ induktivně takto: □

- Bázické prvky: $\mathit{Val}(\mathbf{n}) = n$, kde **n** je dekadický zápis přirozeného čísla n. □
- První induktivní pravidlo: $\mathit{Val}((x)\oplus(y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$.
- Druhé induktivní pravidlo: $\mathit{Val}((x)\odot(y)) = \mathit{Val}(x)\cdot\mathit{Val}(y)$. □

Co je tedy správným významem („hodnotou“) uvedených aritmetických výrazů?

□

Příklad 6.11. *Důkaz správnosti přiřazeného „významu“ $\mathit{Val} : \mathit{SExp} \to \mathbb{N}$.*

Věta. *Pro každý výraz $s \in \mathit{SExp}$ je hodnota $\mathit{Val}(s)$ číselně rovna výsledku vyhodnocení výrazu s podle běžných zvyklostí aritmetiky.* □

Matematickou indukcí: Na rozdíl od dříve probíraných příkladů zde nevidíme žádný celočíselný „parametr n“, a proto si jej budeme muset nejprve definovat. □

Naši indukci tedy povedeme podle „délky ℓ odvození výrazu s“ definované jako počet aplikací induktivních pravidel potřebných k odvození $s \in \mathit{SExp}$.

□

Důkaz: V bázi indukce ověříme vyhodnocení bázických prvků. Platí $\mathit{Val}(\mathbf{n}) = n$, což skutečně odpovídá zvyklostem aritmetiky. □

V indukčním kroku se podíváme na vyhodnocení $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$. □ Podle běžných zvyklostí aritmetiky by hodnota $\mathit{Val}((x) \oplus (y))$ měla být rovna součtu vyhodnocení výrazu x, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(x)$ (x má zřejmě kratší délku odvození), a vyhodnocení výrazu y, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(y)$. □ Takže skutečně $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$.

Druhé pravidlo $\mathit{Val}((x) \odot (y))$ se dořeší analogicky. □

6.4 Uzávěry relací

Definice: Buď V (nějaká) vlastnost binárních relací. Řekneme, že V je *uzavíratelná*, pokud splňuje následující podmínky:

- Pro každou množinu M a každou relaci $R \subseteq M \times M$ existuje alespoň jedna relace $S \subseteq M \times M$, která má vlastnost V a pro kterou platí $R \subseteq S$.
- Nechť I je množina a nechť $R_i \subseteq M \times M$ je relace mající vlastnost V pro každé $i \in I$. Pak relace $\bigcap_{i \in I} R_i$ má vlastnost V.□

Fakt: Libovolná kombinace vlastností reflexivita, symetrie, tranzitivita je uzavíratelná vlastnost.

Ireflexivita a antisymetrie nejsou uzavíratelné vlastnosti. □

Věta 6.13. *Nechť V je uzavíratelná vlastnost binárních relací. Buď M množina a R libovolná binární relace na M. Pak pro množinu všech relací $S \supseteq R$ na M majících vlastnost V existuje infimum R_V (vzhledem k množinové inkluzi), které samo má vlastnost V.*

Tuto infimální relaci R_V s vlastností V nazýváme V*-uzávěr* relace R.

Tvrzení 6.14. Nechť R je binární relace na M. Pak platí následující poznatky.

- *Reflexivní uzávěr* R je přesně relace $R \cup \{(x,x) \mid x \in M\}$. $\square$

- *Symetrický uzávěr* R je přesně relace
$$\overleftrightarrow{R} = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ nebo } (y,x) \in R\}. \square$$

- *Tranzitivní uzávěr* R je přesně relace $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, kde $\mathcal{T}$ je funkce, která pro každou binární relaci S vrátí relaci
$$\mathcal{T}(S) = S \cup \{(x,z) \mid \text{ existuje } y \text{ takové, že } (x,y),(y,z) \in S\}$$
a $\mathcal{T}^i = \underbrace{\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{i}$ je i-krát iterovaná aplikace funkce $\mathcal{T}$. $\square$

- Reflexivní a tranzitivní uzávěr R je přesně relace $R^* = Q^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R. $\square$

- Reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr R (tj. nejmenší ekvivalence obsahující R) je přesně relace $(\overleftrightarrow{Q})^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R. $\square$

Poznámka: Na pořadí aplikování uzávěrů vlastností záleží! Zhruba řečeno, tranzitivní uzávěr aplikujeme coby poslední.

Neformálně:

- V-uzávěr relace je vlastně daný induktivní definicí podle vlastnosti V. □
- Význam reflexivních a symetrických uzávěrů je z předchozího zřejmý. □
- Význam tranzitivního uzávěru R^+ je následovný:

  Do R^+ přidáme všechny ty dvojice (x, z) takové, že v R se lze „dostat po šipkách“ z x do z. Nakreslete si to na papír pro nějakou jednoduchou relaci, abyste význam tranzitivního uzávěru lépe pochopili. □

□

- Například buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto: $R = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pak R^+ je běžné ostré lineární uspořádání $<$ přirozených čísel. □
- A jak bylo dříve řečeno, antisymetrický uzávěr relace prostě nedává smysl.