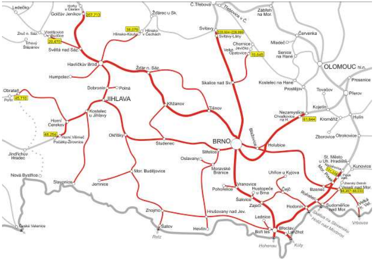
8 Procházení grafu a odvozené úlohy

Nyní se hlouběji podíváme na grafy z programátorské perspektivy: podíváme se na obecné schéma procházení grafu, které je základem mnoha užitečných algoritmů na grafech. Poté se hlouběji zaměříme na dvě specifické grafové úlohy – hledání nejkratší cesty a minimální kostry.



Stručný přehled lekce

* Obecné schéma procházení grafem a jeho varianty.
* Nejkratší cesta v grafu a Dijkstrův algoritmus.
* Minimální kostra grafu a její základní algoritmy.

8.1 Jak obecně projít souvislý graf

Metoda 8.1. Schéma algoritmu pro procházení grafem
Pro vytvoření co nejobecnějšího schématu si pomůžeme následujícími:

- **Vrchol** grafu: má stavy . . . □
  - ∗ iniciační – dostane na začátku,
  - ∗ nalezený – implicitní stav poté, co jsme jej přes některou hranu nalezli (a odložili ke zpracování později), □
  - ∗ zpracovaný – poté, co jsme už probrali všechny hrany z něj vycházející,
  - ∗ (příp. ještě stav „post-zpracovaný“, po dokončení všech následníků).□
- **Úschovna**: je pomocná datová struktura (množina s dodatečnými atributy),
  - ∗ udržuje odložené, tj. nalezené a ještě nezpracované vrcholy, spolu s dodatečnou specifickou informací. □
- Způsob, kterým se vybírají vrcholy z úschovny ke zpracování, určuje variantu algoritmu procházení grafu.
- V prohledávaných vrcholech a hranách se volitelně provádějí *dodatečné programové akce pro prohledání a zpracování* našeho grafu.

Algoritmus 8.2. Generické procházení souvislé komponenty G grafu

- Vstup: Souvislý graf G, daný seznamem vrcholů a seznamy vycházejících hran z každého vrcholu, plus případné ohodnocení. □
- Vybereme lib. počátek prohledávání $u \in V(G)$; úschovna $U \leftarrow \{u\}$. □
- Dokud $U \neq \emptyset$, opakujeme:
  - Zvolíme libovolně $v \in U$; odebereme $U \leftarrow U \setminus \{v\}$. (!)□
  - Pokud stav$(v) =$ zpracovaný, jdeme zpět na start cyklu. (*)
  - Případně provedeme libovolnou akci ZPRACUJ(v). □
  - Pro všechny hrany $f \in E(G)$ vycházející z v provedeme:
    - Nechť w je druhý konec hrany $f = vw$;
    - pokud stav$(w) \neq$ zpracovaný, odložíme $U \leftarrow U \cup \{w\}$. (**)□
  - stav$(v) \leftarrow$ zpracovaný; na start cyklu. □
- Souvislý G je celý prohledaný a zpracovaný.

Pozor, všimněte se, že v bodě (**) obecně dochází k násobnému ukládání, což v praktické implementaci často obejdeme pouhou změnou „odloženého stavu“.

Některé implementace procházení grafu

Jak je vlastně proveden krok (!); „zvolíme libovolně $v \in U$“ ? Právě tato volba je klíčová pro výslednou podobu projití grafu G:

- *Procházení „do šířky“, BFS* – úschovna U je implementovaná jako fronta, neboli je voleno $v \in U$ od prvních vrcholů vložených do úschovny. □
- *Procházení „do hloubky“, DFS* – úschovna U je implementovaná jako zásobník, neboli je voleno $v \in U$ od později vložených do úschovny. (Opakované vložení vrcholu v do U jej posune na vršek zásobníku.) □

Dále zmíníme i tyto dva konkrétní, staré a dobře známé algoritmy přímo založené na prohledávání grafu:

- *Dijkstrův algoritmus* pro nejkratší cestu – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší (dosud určenou celkovou vzdáleností) k počátečnímu u. □
- *Jarníkův algoritmus* pro minimální kostru – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší (délkou hrany) ke kterémukoliv již zpracovanému vrcholu.

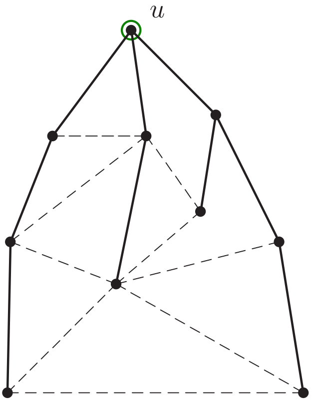
Poznámka: Jarníkův algoritmus se ve světové literatuře se obvykle připisuje Američanu Primovi, který jej však objevil a publikoval až skoro 30 let po Jarníkovi.

Ilustrace rozdílu mezi BFS a DFS

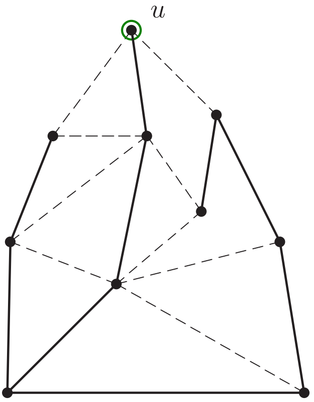
Příklad 8.3. *Pro lepší pochopení rozdílného průběhu při prohledávání grafu do šířky a do hloubky uvádíme následující dva jednoduché obrázky.*

Zobrazeny jsou „cestičky“ (přesněji hrany), kterými byly objeveny nové vrcholy grafu:

BFS



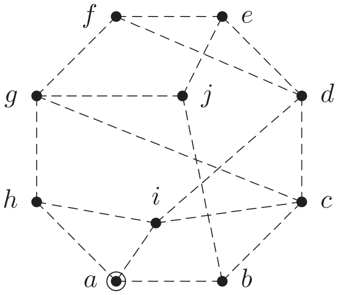
DFS



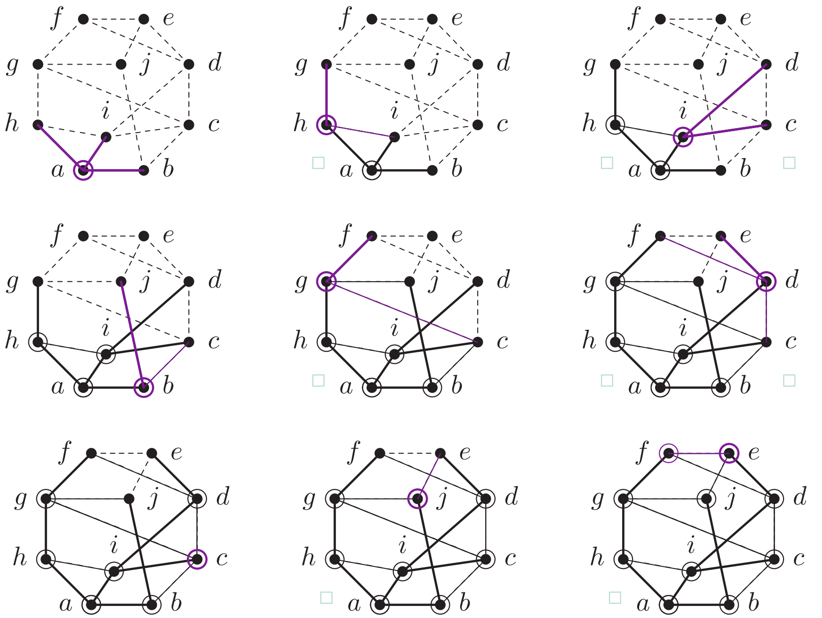
□

Konkrétní ukázky BFS a DFS

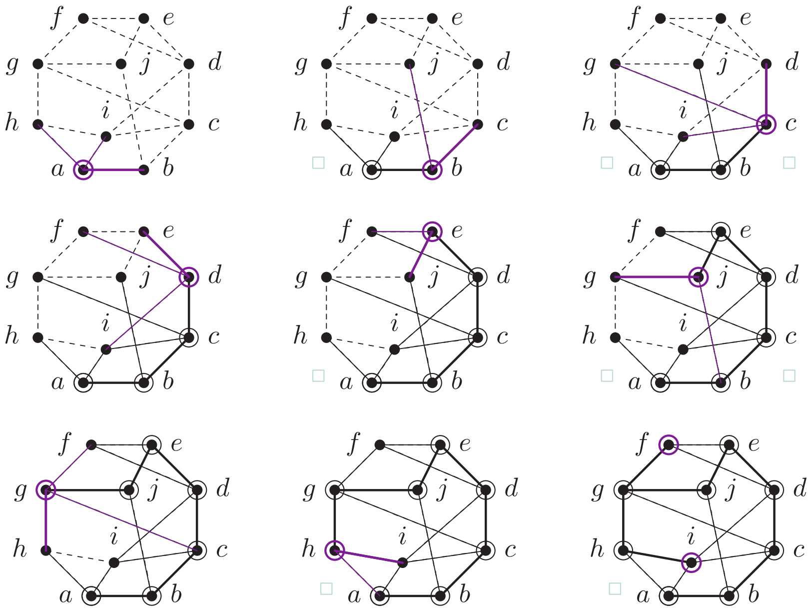
Příklad 8.4. *Ukázka průchodu následujícím grafem do šířky z vrcholu a.*



Značení v prohledávaném grafu: barevně aktuálně zpracovávaný vrchol a jeho hrany objevující nové vrcholy, kroužkem a plnou čarou již zpracované vrcholy a hrany.



Příklad 8.5. *Ukázka průchodu předchozím grafem do hloubky z vrcholu a.*

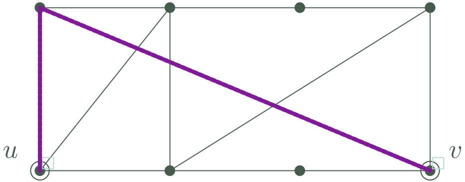


□

8.2 Vzdálenost v grafu

Definice 8.6. **Vzdálenost** $d_G(u,v)$ dvou vrcholů u,v v grafu G je dána délkou nejkratší cesty mezi u a v v G.
Pokud cesta mezi u,v neexistuje, je vzdálenost definována $d_G(u,v) = \infty$. □

Neformálně řečeno, vzdálenost mezi u,v je rovna *nejmenšímu počtu hran*, které musíme překonat, pokud se chceme dostat z u do v. Speciálně vždy platí $d_G(u,u) = 0$.



Fakt: V neorientovaném grafu je vzdálenost symetrická, tj. $d_G(u,v) = d_G(v,u)$.

Lema 8.7. *Vzdálenost v grafech splňuje trojúhelníkovou nerovnost:*

$$\forall u,v,w \in V(G) \ : \ d_G(u,v) + d_G(v,w) \geq d_G(u,w)\,.$$

BFS a zjištění vzdálenosti

Jak nejsnadněji určíme vzdálenost v grafu? Stačí si povšimnout hezkých vlastností procházení grafu do šířky.

Věta 8.8. *Algoritmus procházení grafu do šířky lze použít pro výpočet grafové vzdálenosti z daného vrcholu* u. □

- Toto je poměrně jednoduchá aplikace, kdy počátečnímu vrcholu u přiřadíme vzdálenost 0, a pak vždy každému dalšímu nalezenému vrcholu v přiřadíme vzdálenost o 1 větší než byla vzdálenost vrcholu, ze kterého byl nalezen. □

Důkaz se opírá o následující tvrzení:

* Nechť u, v, w jsou vrcholy souvislého grafu G takové, že $d_G(u,v) < d_G(u,w)$. Pak při algoritmu procházení grafu G do šířky z vrcholu u je vrchol v nalezen dříve než vrchol w. □

V důkaze postupujeme indukcí podle vzdálenosti $d_G(u,v)$... □

8.3 Hledání nejkratší cesty

Definice: Vážený graf je graf G spolu s ohodnocením w hran reálnými čísly

$$w : E(G) \to \mathbb{R}\,.$$

Kladně vážený graf (G, w) je takový, že $w(e) > 0$ pro všechny hrany e. □

Definice 8.9. (vážená vzdálenost) Mějme (kladně) vážený graf (G, w). Váženou délkou cesty P je

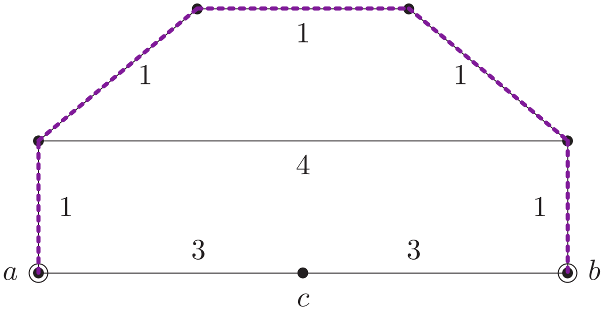
$$d_G^w(P) = \sum_{e \in E(P)} w(e)\,.$$

Váženou vzdáleností v (G, w) mezi dvěma vrcholy u, v pak je

$$d_G^w(u, v) = \min\{d_G^w(P) : P \text{ je cesta s konci } u, v\}\,.$$ □

Lema 8.10. *Vážená vzdálenost v nezáporně vážených grafech (i orientovaných grafech) splňuje trojúhelníkovou nerovnost.*

Příklad 8.11. *Podívejme se na následující ohodnocený graf (čísla u hran udávají jejich váhy–délky.)*

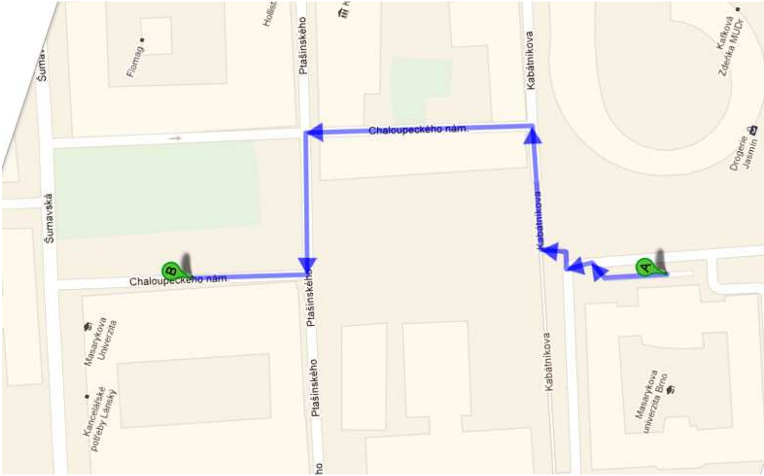


Vzdálenost mezi vrcholy a, c je 3, stejně tak mezi b, c. Co ale mezi a, b? Je jejich vzdálenost 6? Kdepak, vzdálenost a, b je 5, její cesta vede po „horních“ vrcholech, jak je vyznačeno.

Povšimněte si, že tento příklad zároveň ukazuje, že postup prohledáváním do šířky není korektní pro hledání vzdáleností ve váženém grafu. □

Problém nejkratší cesty

Jedná se patrně o nejznámější „grafový“ problém v praktických aplikacích, jenž nalezneme od vyhledávání dopravních spojení, GPS navigací, plánování pohybů robota, až po třeba rozhodovací systémy.



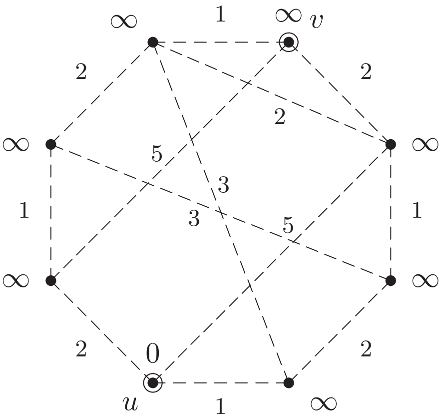
Dijkstrův algoritmus

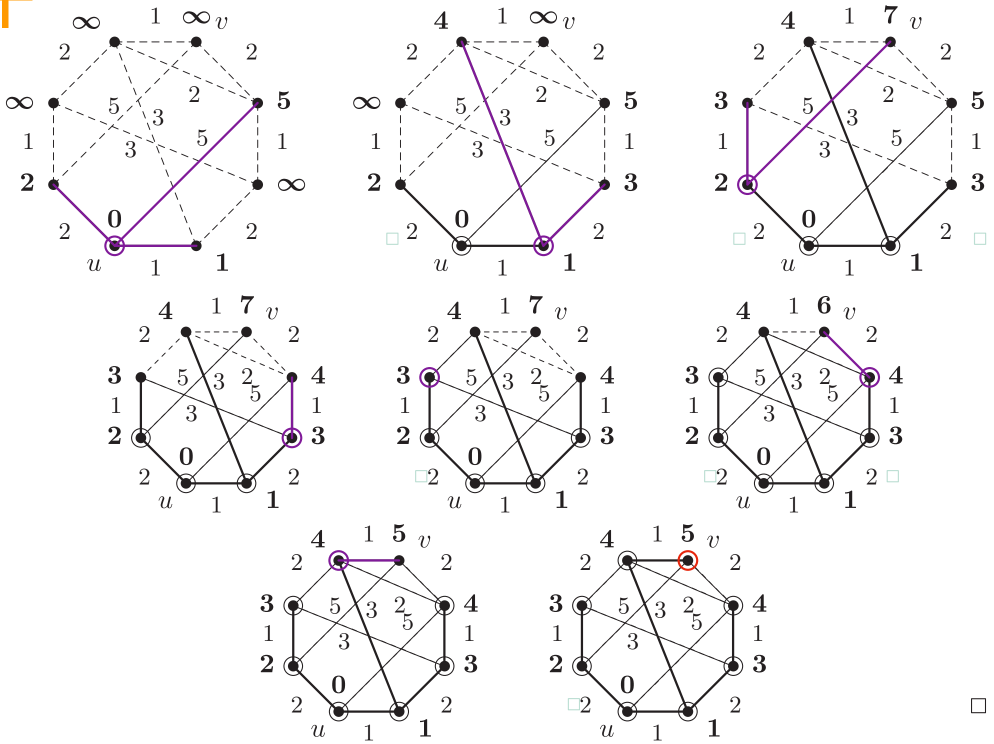
Algoritmus 8.12. Hledání nejkratší cesty mezi u a v v kladně váž. grafu.

- Vstup: Souvislý graf G, daný seznamem vrcholů a seznamy vycházejících hran z každého vrcholu, plus váhy w hran. Počáteční vrchol u a koncový v. □
- Úschovna $U \leftarrow \{(u,\, d(u)=0)\}$. □
- Dokud $U \neq \emptyset$, opakujeme:
  - ∗ Zvolíme $(x,\, d(x)) \in U$ takové, že $d(x)$ je *minimální*. Odebereme $U \leftarrow U \setminus \{(x,\, d(x))\}$. □
  - ∗ Pokud $x = v$, algoritmus může skončit. □
  - ∗ Pro všechny hrany $f \in E(G)$ vycházející z x provedeme:
    - – Nechť y je druhý konec hrany $f = xy$; a nechť $d'(y) = d(x) + w(f)$ (nová cesta do y přes x).
    - – Pokud $(y,\, d(y)) \notin U$, nebo $(y,\, d(y)) \in U$ pro $d(y) > d'(y)$, odložíme $U \leftarrow \big(U \setminus \{(y, d(y))\}\big) \cup \{(y,\, d'(y))\}$ (výměna za novou, lepší dočasnou vzdálenost do y). □
- Výstup: $d(v)$ udává váženou vzdálenost z u do v.

Klíčem k pochopení činnosti Dijkstrova algoritmu je „uvidět“, že v každé jeho fázi jsou správně nalezeny všechny nejkratší cesty z u vedoucí po zpracovaných vrcholech. Postupem prohledávání grafu se tak jednou dostaneme až k určení správné vzdálenosti cíle v. □

Příklad 8.13. *Ukázka běhu Dijkstrova Algoritmu 8.12 pro nalezení nejkratší cesty mezi vrcholy u, v v následujícím váženém grafu.*





Důkaz správnosti

Věta 8.14. *Dijkstrův Algoritmus 8.12 pro kladně vážený graf (G, w) vždy správně najde nejkratší cestu mezi danými vrcholy u, v.* □

Důkaz vede přes následující zesílené tvrzení indukcí:

- V každé iteraci Algoritmu 8.12 hodnota $d(x)$ udává nejkratší vzdálenost z vrcholu u do x při cestě pouze po už zpracovaných vnitřních vrcholech.

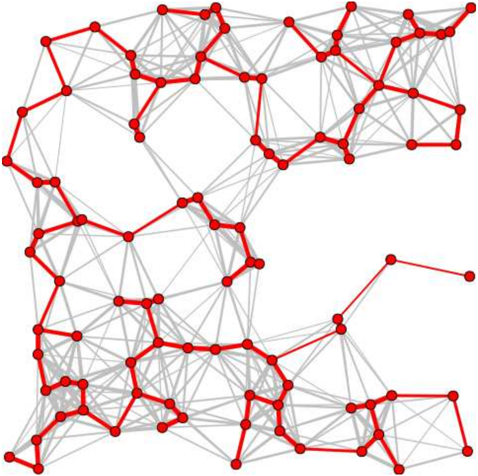
V bázi indukce dovolujeme pouze cesty používající u a x, tj. jen hrany vycházející z u. Ty jsou v první iteraci algoritmu probrány a jejich délky uloženy do U. □

V každém dalším kroku je vybrán jako vrchol x ke zpracování ten, který má ze všech nezpracovaných vrcholů nejkratší nalezenou vzdálenost od počátku u. V tom okamžiku je $d(x)$ platnou vzdáleností do x, neboť jakákoliv cesta přes jiný nezpracovaný vrchol nemůže být kratší díky nezápornosti vah w.

Z toho pak vyplývá, že zpracování vrcholu x správně upraví dočasné vzdálenosti odložené do U. Důkaz indukcí je hotov. □

8.4 Problém minimální kostry

V tomto případě nebudeme hledat nejkratší spojení mezi dvojicí vrcholů, ale mezi všemi vrcholy najednou – této úloze se říká minimální kostra neboli MST („minimum spanning tree“).



V návaznosti na Oddíl 7.4 definujeme toto:

Definice: Podgraf $T \subseteq G$ souvislého grafu G se nazývá *kostrou*, pokud

* T je stromem a
* $V(T) = V(G)$, neboli T propojuje všechny vrcholy G. □

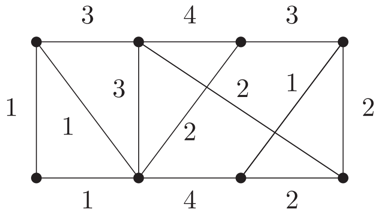
Váhou (délkou) kostry $T \subseteq G$ váženého souvislého grafu (G, w) rozumíme

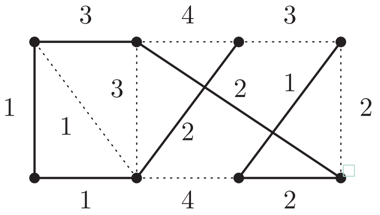
$$d_G^w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)\,.$$ □

Definice 8.15. Problém minimální kostry (MST) ve váž. grafu (G, w) hledá kostru $T \subseteq G$ s nejmenší možnou vahou (přes všechny kostry grafu G). □

Problém minimální kostry je ve skutečnosti historicky úzce svázán s jižní Moravou a Brnem, konkrétně s elektrifikací jihomoravských vesnic ve dvacátých letech! Právě na základě tohoto praktického optimalizačního problému brněnský matematik Otakar Borůvka jako první podal řešení problému minimální kostry v roce 1926.

Hladové řešení minimální kostry



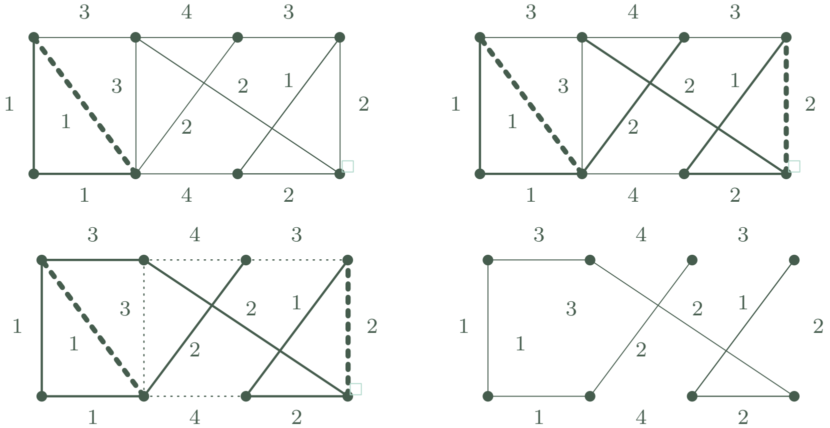


Metoda 8.16. Hladový postup pro minimální kostru grafu (G, w).
Mějme dán souvislý vážený graf G s ohodnocením hran w.

- Seřadíme všechny hrany G jako $E(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ tak, že $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$. □
- Inicializujeme prázdnou kostru $T = (V(G), \emptyset)$.
- Po řadě pro $i = 1, 2, \ldots, m$ provedeme následující:
  - ∗ Pokud $T + e_i$ nevytváří kružnici, tak $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e_i\}$.
    (Neboli pokud e_i spojuje různé komponenty souvislosti dosavadního T.)
- Na konci T obsahuje minimální kostru grafu G.

Ukážeme si postup hladového algoritmu pro vyhledání kostry výše zakresleného grafu. Hrany si nejprve seřadíme podle jejich vah $1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4$.

V obrázku průběhu algoritmu používáme tlusté čáry pro vybrané hrany kostry a tečkované čáry pro zahozené hrany. Hrany teď postupně přidáváme do kostry / zahazujeme. . .



Získáme tak minimální kostru velikosti $1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 12$, která je v tomto případě (náhodou) cestou, na posledním obrázku vpravo.

Jarníkův (Primův) algoritmus

Algoritmus 8.17. Hledání minimální kostry ve váž. grafu (G, w).
Níže uvedená specifická implementace procházení grafu využívá úschovnu rozšířeným způsobem, kdy ukládá i příchozí hranu do vrcholu.

- Vstup: Souvislý graf G, daný seznamem vrcholů a seznamy vycházejících hran z každého vrcholu, plus váhy w hran. □
- Vybereme lib. počátek prohledávání $u \in V(G)$.
  Úschovna $U \leftarrow \{(u, \emptyset)\}$ a počáteční kostra $T \leftarrow (V(G), \emptyset)$. □
- Dokud $U \neq \emptyset$, opakujeme:
  - ∗ Zvolíme $(x, e) \in U$ takové, že $w(e)$ je minimální (kde $w(\emptyset) = 0$).
    Odebereme $U \leftarrow U \setminus \{(x, e)\}$. □
  - ∗ Přidáme $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e\}$ (nová hrana do budoucí kostry). □
  - ∗ Pro všechny hrany $f \in E(G)$ vycházející z x provedeme:
    - Nechť y je druhý konec $f = xy$ a f' je takové, že $(y, f') \in U$.
    - Pokud takové f' neexistuje nebo $w(f') > w(f)$,
      odložíme $U \leftarrow \big(U \setminus \{(y, f')\}\big) \cup \{(y, f)\}$. □
- Výstup: T udává výslednou minimální kostru.

Následuje stručná ukázka průběhu Jarníkova algoritmu.