FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I

Řešení sady problémů 4.

1. Nechť $A = (K, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$ je konečný automat akceptující jazyk L.
   Zkonstruujeme nejdříve nedeterministický konečný automat A' akceptující jazyk $\{a\}\{a, b\}^*\{a\}$.
   $A' = (K', \{a, b\}, \delta', 1, F')$, přičemž:
   $K' = \{1, 2, 3\}$;
   $F' = \{3\}$;
   δ' : $\delta'(1, a) = \{2\}$
   $\delta'(1, b) = \emptyset$
   $\delta'(2, a) = \{2, 3\}$
   $\delta'(2, b) = \{2\}$
   $\delta'(3, a) = \delta'(3, b) = \emptyset$
   Automat $\overline{A}$ akceptující jazyk $\overline{L} = L \cap \{a\}\{a, b\}^*\{a\}$ je kartézským součinem automatů A a A'.
   $\overline{A} = (\overline{K}, \{a, b\}, \overline{\delta}, \overline{q_0}, \overline{F})$, přičemž:
   $\overline{K} = K \times K'$;
   $\overline{q_0} = (q_0, 1)$;
   $\overline{F} = F \times F'$;
   $\overline{\delta}$: $\overline{\delta}((p, s), x) = \{(r, t) \mid r \in \delta(p, x);\ t \in \delta'(s, x)\}$
   pro všechna $p \in K;\ s \in K';\ x \in \{a, b\}$.

2. Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je regulární gramatika, t.j. všechna její pravidla jsou tvaru $A \longrightarrow xB$ anebo $A \longrightarrow x$ ($A, B \in N,\ x \in \Sigma$). Proto odvození slova $w = x_2x_1$ v gramatice G je tvaru $S \Longrightarrow^* x_2X \Longrightarrow^* x_2x_1$. Vytvoříme gramatiku G', která nejprve vygeneruje část x_1, a pak část x_2.
   $G' = (N', \Sigma, P', S')$, přičemž množina neterminálů N' obsahuje symboly
   $N' = \{A_{i,Y} \mid A, Y \in N;\ i = 1, 2\} \cup \{S'\}$,
   (S' je nový počáteční neterminál; neterminál $A_{i,Y}$ značí, že odvozování začalo neterminálem Y a odvozuje se slovo x_i).
   Množina pravidel $P' = P_0 \cup P_1 \cup P_2$, kde

   $P_0 = \{S' \longrightarrow Y_{1,Y} \mid Y \in N\}$

   (začínáme simulovat odvození slova x_1 od neterminálu Y)

   $P_1 = \{A_{1,Y} \longrightarrow aB_{1,Y} \mid A \longrightarrow aB \in P\} \cup \{A_{1,Y} \longrightarrow aS_{2,Y} \mid A \longrightarrow a \in P\}$

   (simulace odovození $X \Longrightarrow^* x_1$, resp. přechod na simulaci $S \Longrightarrow^* x_2X$.)

   $P_2 = \{A_{2,Y} \longrightarrow aB_{2,Y} \mid A \longrightarrow aB \in P\} \cup \{A_{2,Y} \longrightarrow a \mid A \longrightarrow aY \in P\}$

   (simulace odovození $S \Longrightarrow^* x_2X$, resp. její ukončení, když je skutečně možné odvodit v G větu x_2Y a Y je neterminál, z kterého bylo generováno x_1.

3. Nejmenší třída jazyků, obsahující všechny konečné jazyky a uzavřená vzhledem k operacím sjednocení, průnik a komplement (v dalším ji budeme označovat $\mathcal{T}$) je vlastní podmnožinou množiny regulárních jazyků $\mathcal{R}$.
Inkluze $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$ je důsledkem uzávěrových vlastností třídy $\mathcal{R}$ (konkrétně: každý konečný jazyk je regulární a třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operacím sjednocení, průniku a komplementu). Existence regulárního jazyka nepatřícího do třídy $\mathcal{T}$ je důsledkem následujícího tvrzení:
T: Nechť $L \in \mathcal{T}$, $L \subseteq \Sigma^*$. Pak buď jazyk L je konečný, anebo komplement jazyka L, $L^c = \Sigma^* - L$, je konečný.
Nyní stačí uvážit jazyk $\{aa\}^*$. Jde o nekonečný regulární jazyk, kterého komplement $\{a\}\{aa\}^*$ je taky nekonečný, a podle předcházejícího tvrzení T nepatří do třídy $\mathcal{T}$.

Dokážeme platnost tvrzení T. Při důkazu vyjdeme z faktu, že každý jazyk L třídy $\mathcal{T}$ vznikne konečným počtem operací $\cup$, $\cap$, ^{c} z konečných jazyků. Definujeme hloubku jazyka L, $hl(L)$, jako počet operací potřebných k vytvoření jazyka L takto:

$$hl(L) = \begin{cases} 0 & \text{když } L \text{ je konečný} \\ hl(L_1) + hl(L_2) + 1 & \text{když } L \text{ je nekonečný a } L = L_1 \cup L_2;\ L_1, L_2 \in \mathcal{T} \\ hl(L_1) + hl(L_2) + 1 & \text{když } L \text{ je nekonečný a } L = L_1 \cap L_2;\ L_1, L_2 \in \mathcal{T} \\ hl(L_1) + 1 & \text{když } L \text{ je nekonečný a } L = L_1^c;\ L_1 \in \mathcal{T} \end{cases}$$

Tvrzení dokážeme indukcí vzhledem k hloubce jazyka L.

1° Nechť $L \in \mathcal{T}$ a $hl(L) = 0$. Pak jazyk L je konečný a tvrzení platí.

2° Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny jazyky hloubky menší než n; $n > 0$. Dokážeme jej pro jazyky hloubky n. Předpokládejme proto, že $L \in \mathcal{T}$ a $hl(L) = n$. Pak L je nekonečný a platí jedna z následujících možností:

- $L = L_1 \cup L_2$, přičemž $hl(L_1) < n$, $hl(L_2) < n$ a nutně alespoň jeden z jazyků L_1, L_2 je nekonečný. Podle indukčního předpokladu je buď L_1^c nebo L_2^c konečný. Ale $L^c = (L_1 \cup L_2)^c = L_1^c \cap L_2^c$, a proto komplement jazyka L je konečný.
- $L = L_1 \cap L_2$, přičemž $hl(L_1) < n$, $hl(L_2) < n$ a nutně oba jazyky L_1, L_2 jsou nekonečné. Pak ale podle indukčního předpokladu jejich komplementy jsou konečné. Ale $L^c = (L_1 \cap L_2)^c = L_1^c \cup L_2^c$, a proto jazyk L je konečný.
- $L = L_1^c$, přičemž $hl(L_1) < n$ a L_1^c je nekonečný. Pak ale podle indukčního předpokladu je L_1 konečný, a tedy i komplement jazyka L je konečný.