

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

2. [2 body] Mějme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$.

Každý z následujících jazyků popište pomocí jednoprvkových jazyků $\{a\}$ a $\{b\}$ s využitím konečného počtu operací sjednocení (\cup), průniku (\cap), rozdílu (\setminus), doplňku (co-), zřetězení (\cdot), mocniny ($^0, ^2, ^3, \dots$), iterace (*) a pozitivní iterace ($^+$), mimo operací, které jsou zakázány u konkrétního jazyka. Navíc můžete používat pomocné jazyky rovněž zadané tímto způsobem.

- $\{a, b\}^+$ bez použití pozitivní iterace
- $\text{co-}(\{aa\}^*)$ bez použití doplňku a rozdílu
- $\{\varepsilon\}$ bez použití mocniny a rozdílu
- $\text{co-}\{a\} \cdot \text{co-}\{b\}$ bez použití doplňku a rozdílu

Nejdříve si pro lepší srozumitelnost zápisu řešení zdefinujeme pomocné jazyky:

- $L_{ab} = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$
- $L_{empty} = \emptyset = \{a\} \cap \{b\}$
- $L_{aa} = \{aa\} = \{a\} \cdot \{a\}$

Nyní můžeme pomocí povolených operací a pomocných jazyků zapsat jednotlivá řešení:

a) $\{a, b\}^+ = L_{ab} \cdot L_{ab}^*$

Je zřejmé, že pomocí L_{ab}^* vygenerujeme všechna slova nad abecedou Σ . Přiřetěžením jazyka L_{ab} se zbavíme prázdného slova, které požadovaný jazyk $\{a, b\}^+$ neobsahuje, zároveň však všechna ostatní slova zachováme.

Další možné řešení je například $\{a, b\}^+ = L_{ab}^* \setminus L_{empty}^*$.

b) $\text{co-}(\{aa\}^*) = (L_{ab}^* \cdot \{b\} \cdot L_{ab}^*) \cup (\{a\} \cdot L_{aa}^*)$

První závorka vygeneruje všechna slova obsahující alespoň jedno b a druhá závorka vygeneruje právě slova obsahující lichý počet písmen a a žádné b .

c) $\{\varepsilon\} = L_{empty}^*$

Řešení plyne přímo z definice.

d) $\text{co-}\{a\} \cdot \text{co-}\{b\} = L_{ab}^*$

Jedná se o jazyk obsahující všechna slova nad abecedou Σ . Je potřeba si dobře uvědomit, že jazyk $\text{co-}\{a\}$ skutečně obsahuje všechna slova nad Σ (včetně ε) kromě slova a . Obdobně pro jazyk $\text{co-}\{b\}$.

Definice zřetězení aplikovaná na naše jazyky vypadá následovně:

$$\text{co-}\{a\} \cdot \text{co-}\{b\} = \{u \cdot v \mid u \in \text{co-}\{a\} \wedge v \in \text{co-}\{b\}\}$$

Nyní je zřejmé vidět, že pro $u = \varepsilon \in \text{co-}\{a\}$ se do výsledku vygeneruje $\text{co-}\{b\}$, tedy všechna slova až na b . To ovšem dostaneme pro $u = b \in \text{co-}\{a\} \wedge v = \varepsilon \in \text{co-}\{b\}$. Celkově tedy dostáváme L_{ab}^* .