IB102 – úkol 3, příklad 1 – řešení **Odevzdání: 19. 10. 2015**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

1. [3 body] O každém z následujících jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ rozhodněte, zda je regulární, a vaše tvrzení dokažte.

Tedy je-li vaše odpověď, že se jedná o regulární jazyk, uveďte příslušnou regulární gramatiku nebo konečný automat včetně všech formálních náležitostí. Pokud se podle vás naopak o regulární jazyk nejedná, dokažte tuto skutečnost pomocí *Lemmatu o vkládání* (Pumping lemma).

a) $L_a = \{w \in \Sigma^* \mid$ počet výskytů podslov aa a bb ve slově w je stejný $\}$

b) $L_b = \{w \in \Sigma^* \mid$ počet výskytů podslov ab a ba ve slově w je stejný $\}$

---

1. Jazyk L_a není regulární. Jeho neregularitu dokážeme pomocí obměny tvrzení Lemmatu o vkládání.

   - Buď $n \in \mathbb{N}$ libovolné přirozené číslo, nadále pevné.
   - Zvolme slovo $w = a^n b^n$. Slovo w jistě patří do jazyka L a jeho délka je $|w| = 2n \geq n$.
   - Uvažme rozdělení slova w na libovolné tři částí $w = xyz$ splňující podmínky $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$. Pak slova x, y, z musí být ve tvaru

     $$x = a^k,\quad y = a^l,\quad z = a^{n-k-l}b^n$$

     pro vhodná čísla $k, l \in \mathbb{N}_0$. Navíc musí platit $l > 0$, protože víme, že $y \neq \varepsilon$.
   - Zvolme $i = 0$ a uvažme slovo xy^iz. Dosazením, použitím definice mocniny slova a algebraickými úpravami dostaneme

     $$xy^0z = xz = a^k \cdot a^{n-k-l}b^n = a^{n-l}b^n.$$

   Slovo xy^0z jistě nepatří do jazyka L, protože $l > 0$, a tedy z Lemmatu o vkládání dostáváme, že jazyk L není regulární.

2. Jazyk L_b je regulární. Klíčové pozorování je, že mezi každými dvěma výskyty podslova ab se musí objevit výskyt podslova ba a naopak mezi každými dvěma výskyty podslova ba se musí objevit výskyt podslova ab. Takže jazyk L_b můžeme zapsat jiným způsobem jako

   $$L_b = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{slovo } w \text{ začíná a končí stejným písmenem}\} \cup \{\varepsilon\}.$$

   Pak už je jednoduché popsat jazyk L_b regulární gramatikou $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

   $$P = \{S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid aA \mid bB,\quad A \to a \mid aA \mid bA,\quad B \to b \mid aB \mid bB\}.$$