IB102 – úkol 4, příklad 1 – řešení   Odevzdání: 26. 10. 2015

Vypracoval(a): UČO:

Skupina:

---

1. [2 body] Dokažte, nebo vyvraťte, že následující tvrzení jsou platná pro libovolnou abecedu Σ.

a) $K \subseteq \Sigma^*$ je konečný a $L \subseteq \Sigma^*$ je libovolný $\implies$ co$-(K \cap L)$ je regulární.

b) $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jsou regulární $\implies$ jazyk $\{w \mid w$ patří právě do jednoho z $L_1, L_2\}$ je regulární.

c) $L \subseteq \Sigma^*$ je regulární, $n \geq 0 \implies$ jazyk $\{w \mid w \in L, |w| \geq n\}$ je regulární.

d) $L \subseteq \Sigma^*$ je regulární $\implies$ jazyk $\{sort(w) \mid w \in L\}$ je regulární (kde $sort(w)$ je slovo vzniklé seřazením písmen ve slově w, např. $sort(acabc) = aabcc$).

Pokud budete potřebovat, můžete v celém příkladu využívat toho, že na přednášce a cvičeních byly ukázány některé neregulární jazyky (jejich neregularitu nemusíte znovu dokazovat). V důkazu můžete rovněž použít znalosti o uzavřenosti třídy regulárních jazyků na operace prezentované na přednášce.

---

a) Tvrzení platí.

Důkaz. Nechť K je libovolný konečný jazyk a L je libovolný jazyk. Pak i jazyk $K \cap L$ je konečný. Jelikož $K \cap L$ je konečný, tak je i regulární a z uzavřenosti třídy regulárních jazyků na doplněk plyne, že i co$-(K \cap L)$ je regulární. □

b) Tvrzení platí.

Důkaz. Jazyk $L = \{w \mid w$ patří právě do jednoho z $L_1, L_2\}$ můžeme vyjádřit jako $(L_1 \cup L_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$. Jelikož je třída regulárních jazyků uzavřená na operace $\cup, \cap$ a $\setminus$, tak je i L regulární. □

c) Tvrzení platí.

Důkaz. Mějme jazyk $R = \{w \mid w \in \Sigma^*, |w| \geq n\} = \Sigma^n \cdot \Sigma^*$. Jazyk R je regulární což vyplývá z uzavřenosti třídy regulárních jazyků na operace mocnina a iterace. Pak můžeme jazyk $\{w \mid w \in L, |w| \geq n\}$ vyjádřit jako $L \cap R$. Jelikož je třída regulárních jazyků uzavřená na operace $\cap$, tak je i jazyk $\{w \mid w \in L, |w| \geq n\}$. □

d) Tvrzení neplatí.

Důkaz. Dokážeme protipříkladem. Mějme regulární jazyk $L = \{w \mid w = (ab)^n, n \in \mathbb{N}\}$, pak jazyk $\{sort(w) \mid w \in L\} = \{w \mid w = a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$ o kterém z přednášky víme, že není regulární. □