

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

2. [2 body] O následujícím jazyku nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ rozhodněte, zda je bezkontextový, a své tvrzení dokažte.

$$L = \{ucv \mid u, v \in \Sigma^*, \#_a(u) = \#_b(v), \#_b(u) = \#_a(v)\}$$

V případě, že je vaše odpověď, že se jedná o bezkontextový jazyk, uveďte příslušnou bezkontextovou gramatiku, nebo zásobníkový automat. V opačném případě své tvrzení dokažte pomocí *Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky* (Pumping lemma pro CFL).

Jazyk L **není bezkontextový**. Toto tvrzení dokážeme obměnou lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky.

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.
- Zvolme slovo $z = a^n b^n c b^n a^n$. Pak jistě platí $z \in L$ a $|z| = 4n + 1 > n$.
- Uvažme libovolné rozdělení slova z na pět podslov $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$, pro která platí $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$ a $vx \neq \varepsilon$. Pro libovolné takové rozdělení rozlišme následující případy podle toho, ve kterém z podslov se nachází písmeno c :

Písmeno c se nachází v podslově u (tedy podslovo vwx je vpravo od písmene c)

Zvolme $i = 0$. Chceme ukázat, že platí $uv^iwx^i y = uwy \notin L$.

Díky podmínce $vx \neq \varepsilon$ víme, že slovo vx musí obsahovat alespoň jedno písmeno a nebo b . Ale pak část slova uwy za písmenem c obsahuje alespoň o jedno písmeno a nebo b méně než část před písmenem c , a tedy slovo uwy skutečně do jazyka L nenáleží.

Písmeno c se nachází v podslově v nebo x

Zvolme $i = 0$. Pak platí $uv^iwx^i y = uwy \notin L$, protože slovo uwy neobsahuje písmeno c .

Písmeno c se nachází v podslově w

Zvolme $i = 0$. Chceme ukázat, že platí $uv^iwx^i y = uwy \notin L$.

Díky podmínce $vx \neq \varepsilon$ víme, že alespoň jedno ze slov v a x musí být neprázdné. Díky podmínce $|vwx| \leq n$ navíc víme, že ve slovech v a x se můžou vyskytovat jen písmena b . Celkově tedy alespoň jedno ze slov v a x obsahuje alespoň jedno písmeno b .

Ale pak je ve slově uwy před c více znaků a než znaků b za c nebo naopak je před c méně znaků b než znaků a za c . A tedy slovo uwy skutečně do jazyka L nenáleží.

Písmeno c se nachází v podslově y (tedy podslovo vwx je vlevo od písmene c)

Zvolme $i = 0$. Chceme ukázat, že platí $uv^iwx^i y = uwy \notin L$.

Díky podmínce $vx \neq \varepsilon$ víme, že slovo vx musí obsahovat alespoň jedno písmeno a nebo b . Ale pak část slova uwy před písmenem c obsahuje alespoň o jedno písmeno a nebo b méně než část za písmenem c , a tedy slovo uwy skutečně do jazyka L nenáleží.

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

Celkově jsme pro každé přirozené číslo n našli slovo z z jazyka L délky větší než n takové, že pro libovolné jeho rozdělení na pět slov u, v, w, x, y splňujících podmínky z lemmatu o vkládání existuje nezáporné celé číslo i takové, že uv^iwx^iy není v jazyce L , a tedy z lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky vyplývá, že jazyk L není bezkontextový.