

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

**1. [2 body]** Uvažme abecedu  $\Sigma = \{a, =, +, -\}$  a jazyk  $L$  nad touto abecedou reprezentující sčítání a odečítání unárně zapsaných přirozených čísel bez nuly.

Libovolné  $n \in \mathbb{N}$  reprezentujeme jako posloupnost  $a^n$ . Tedy například číslo 3 bude reprezentováno jako  $aaa$ .

Slova z jazyka  $L$  jsou tvaru

$$a^{i_1} \pm_1 a^{i_2} \pm_2 \cdots \pm_{n-1} a^{i_n} = z,$$

kde  $n \geq 1$ ,  $\pm_k \in \{+, -\}$  pro všechna  $0 < k < n$ ,  $i_l > 0$  pro všechna  $0 < l \leq n$  a  $z$  je posloupnost znaků  $a$  reprezentující výsledek operace.

Pro každé  $0 < k < n$  označme jako  $\odot_k$  aritmetickou operaci odpovídající symbolu  $\pm_k$ . Tedy pokud  $\pm_k$  je  $+$ , pak  $\odot_k$  je  $+$ , naopak pokud  $\pm_k$  je  $-$ , pak  $\odot_k$  je  $-$ .<sup>1</sup> Označme dále jako  $r_z$  celé číslo, které je výsledkem operací reprezentovaných částí slova před symbolem  $=$ . Tedy  $r_z = i_1 \odot_1 i_2 \odot_2 \cdots \odot_{n-1} i_n$ . Konečně, pokud  $r_z \geq 0$ , pak klademe  $z = a^{r_z}$ . Je-li naopak  $r_z < 0$ , klademe  $z = -a^{-r_z}$ .

Uveďme konkrétní příklady slov z jazyka (mezery ve slově píšeme jen pro lepší čitelnost, nepatří mezi terminály):

- $aaa = aaa$ ,
- $a + aa - a = aa$ ,
- $a - a =$ ,
- $a - aaaa + aa = -a$ .

Sestrojte (obyčejný, nikoli rozšířený) nedeterministický zásobníkový automat akceptující jazyk  $L$ . Jasně uveďte, jakým způsobem váš automat akceptuje (koncovým stavem, prázdným zásobníkem).

Pro řešení vytvoříme zásobníkový automat akceptující prázdným zásobníkem.

Zásobníkový automat intuitivně funguje tak, že během čtení vstupu si na zásobníku uchovává dosavadní výsledek. Tedy průběžně zvyšuje či snižuje hodnotu reprezentovanou zásobníkem o počet přečtených  $a$  (podle toho, nacházejí-li se znaky  $a$  za  $+$  nebo za  $-$ ). Hodnotu reprezentovanou zásobníkem pak po přečtení znaku  $=$  zkontroluje s řetězcem, který následuje.

Definujme zásobníkovou abecedu  $\Gamma = \{\perp, P, N\}$ . Řetězec  $P^n$  na zásobníku nám reprezentuje hodnotu  $n$ , řetězec  $N^n$  nám reprezentuje  $-n$ .

Množina stavů je  $Q = \{q_a^+, q_a^-, q^+, q^-, q_c, q_=\}$ . Ve stavech  $q_a^+$  a  $q_a^-$  kontrolujeme nenulovost operandů. Stav  $q^+$  a  $q^-$  reprezentují stavy, ve kterých čteme znaky  $a$  a upravujeme dosavadní hodnotu na zásobníku podle toho, jestli před znaky  $a$  bylo  $+$  nebo  $-$ . Stav  $q_ =$

<sup>1</sup>Všimněte si rozdílu mezi syntaxí a sémantikou. Symbol  $+$  je pouhý prvek z abecedy  $\Sigma$  bez jakéhokoliv významu. Naproti tomu  $+$  je standardní binární funkce, která pro dvě celá čísla vrátí jejich součet. Analogicky pro  $-$  a  $-$ .

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

slouží po přečtení = ke kontrole znaménka výsledku. Ve stavu  $q_c$  kontrolujeme správný počet písmen  $a$ .

Hledaný automat  $\mathcal{A}$  (akceptující prázdným zásobníkem) definujeme jako

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_a^+, \perp, \emptyset),$$

kde přechodová funkce  $\delta$  je definována níže. Pro přehlednost jsme rozdělili definici do skupin podle stavů.

Po přečtení znaku  $+$  (nebo před začátkem čtení slova) budeme zvyšovat dosavadní hodnotu na zásobníku o počet následujících znaků  $a$ . Pomocí stavu  $q_a^+$  pohlídáme, že přečteme minimálně jedno  $a$ . Zbytek čtení je pak realizováno ve stavu  $q^+$ .

Obdobně sestrojíme přechody pro stav  $q_a^-$ .

$$\delta(q_a^+, a, \perp) = \{(q^+, P\perp)\}$$

$$\delta(q_a^+, a, P) = \{(q^+, PP)\}$$

$$\delta(q_a^+, a, N) = \{(q^+, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_a^-, a, \perp) = \{(q^-, N\perp)\}$$

$$\delta(q_a^-, a, P) = \{(q^-, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_a^-, a, N) = \{(q^-, NN)\}$$

Ve stavu  $q^+$  zvyšujeme se čtením znaků  $a$  počet znaků  $P$  na zásobníku, je-li dosavadní výsledek nezáporný, případně ubíráme počet znaků  $N$ , je-li záporný. Po přečtení znaku operace  $+$  (či  $-$ ) přejdeme do stavu  $q_a^+$  ( $q_a^-$ ) pro kontrolu nenulovosti operandů. Se znakem  $=$  přejdeme do stavu  $q_=$ pro kontrolu správnosti výsledku.$

Obdobně sestrojíme přechody pro stav  $q^-$ .

$$\delta(q^+, a, \perp) = \{(q^+, P\perp)\}$$

$$\delta(q^+, a, P) = \{(q^+, PP)\}$$

$$\delta(q^+, a, N) = \{(q^+, \varepsilon)\}$$

$$\forall X \in \Gamma : \delta(q^+, +, X) = \{(q_a^+, X)\}$$

$$\forall X \in \Gamma : \delta(q^+, -, X) = \{(q_a^-, X)\}$$

$$\forall X \in \Gamma : \delta(q^+, =, X) = \{(q_=X)\}$$

$$\delta(q^-, a, \perp) = \{(q^-, N\perp)\}$$

$$\delta(q^-, a, P) = \{(q^-, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q^-, a, N) = \{(q^+, NN)\}$$

$$\forall X \in \Gamma : \delta(q^-, +, X) = \{(q_a^+, X)\}$$

$$\forall X \in \Gamma : \delta(q^-, -, X) = \{(q_a^-, X)\}$$

$$\forall X \in \Gamma : \delta(q^-, =, X) = \{(q_=X)\}$$

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

Po přečtení znaku = očekáváme na vstupu znak  $a$  nebo  $-$ . Je-li na vrcholu zásobníku  $P$ , pak nutně za = následuje znak  $a$  (neboť má být kladný výsledek). Se znakem  $-$  je analogicky očekáváno na zásobníku  $N$ . Pokud je na vrcholu zásobníku znak  $\perp$ , pak je výsledek operace nulový, a tedy vstup by měl být pro správně utvořené slovo dočten. Smažeme tedy zásobník.

$$\begin{aligned}\delta(q_=: \varepsilon, \perp) &= \{(q_c, \varepsilon)\} \\ \delta(q_=: a, P) &= \{(q_c, \varepsilon)\} \\ \delta(q_=: -, N) &= \{(q_c, N)\}\end{aligned}$$

Ve stavu  $q_c$  již stačí zkontrolovat, že sedí počet znaků na zásobníku s počtem znaků za =.

$$\begin{aligned}\forall X \in \{P, N\} : \delta(q_c, a, X) &= \{(q_c, \varepsilon)\} \\ \delta(q_c, \varepsilon, \perp) &= \{(q_c, \varepsilon)\}\end{aligned}$$