IB102 – úkol 10, příklad 2 – řešení **Odevzdání: 14. 12. 2015**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

2. [2 body] Nechť Σ je libovolná abeceda a $L, R \subseteq \Sigma^*$ jsou libovolné jazyky nad touto abecedou. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé, a vaše tvrzení dokažte:

a) $L \leq_m R$ a L není triviální $\implies$ R není triviální

b) $L \leq_m R$ a $R \leq_m L$ $\implies$ $L = R$

Připomeňme, že jazyk nad abecedou Σ je triviální, jestliže je roven $\emptyset$ nebo Σ^*.

---

a) Tvrzení **platí**.

Důkaz. Nechť L, R jsou libovolné jazyky splňující předpoklad (tedy $L \leq_m R$ a L není triviální). Z netriviality jazyka L plyne existence slov $w \in L$, $\overline{w} \notin L$. Neboť $L \leq_m R$, tak existuje funkce $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ taková, že pro každé $x \in \Sigma^*$ platí $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in R$. Tedy platí $f(w) \in R$ a $f(\overline{w}) \notin R$. Zřejmě tedy $R \neq \emptyset$ (neboť obsahuje slovo $f(w)$) a $R \neq \Sigma^*$ (neboť neobsahuje slovo $f(\overline{w})$). Tedy R není triviální. □

b) Tvrzení **neplatí** a vyvrátíme jej protipříkladem.

Důkaz. Nechť $\Sigma = \{a, b\}$, $L = \{a\}$ a $R = \{b\}$. Ukážeme, že $L \leq_m R$, $R \leq_m L$, ale zřejmě $L \neq R$.

Definujme funkci $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ následovně:

$$f(w) = \begin{cases} b, & \text{jestliže } w = a, \\ bb & \text{jinak} \end{cases}$$

Ukážeme, že f je redukcí z L do R.
Buď $w \in \Sigma^*$ libovolné. Platí $w \in L \Leftrightarrow w = a \Leftrightarrow f(w) = b \Leftrightarrow f(w) \in R$. Funkce f je zřejmě totálně vyčíslitelná. Tedy platí, že $L \leq_m R$.

Nyní uvažme funkci $f' : \Sigma^* \to \Sigma^*$, kde

$$f'(w) = \begin{cases} a, & \text{jestliže } w = b, \\ aa & \text{jinak} \end{cases}$$

Ukážeme, že f' je redukcí z R do L.
Buď $w \in \Sigma^*$ libovolné. Platí $w \in R \Leftrightarrow w = b \Leftrightarrow f'(w) = a \Leftrightarrow f'(w) \in L$. Funkce f' je totálně vyčíslitelná, a tedy $R \leq_m L$.

Tvrzení tedy neplatí, neboť jsme nalezli dva jazyky takové, že $L \leq_m R$, $R \leq_m L$ a zároveň $L \neq R$. □