

Minimální automat

Deterministický konečný automat \mathcal{M} s totální přechodovou funkcí nazveme **minimální konečný automat** pro jazyk $L(\mathcal{M})$, neexistuje-li ekvivalentní DFA s totální přechodovou funkcí a menším počtem stavů.

Důsledek 2.31. Minimální konečný automat akceptující regulární jazyk L je určen jednoznačně až na isomorfismus (tj. přejmenování stavů).

Důkaz. plyne přímo z Myhill-Nerodovy věty. □

Konstrukce minimálního konečného automatu

Definice 2.18. Necht' $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA. Stav $q \in Q$ nazveme **dosažitelný**, pokud existuje $w \in \Sigma^*$ takové, že $\hat{\delta}(q_0, w) = q$. Stav je **nedosažitelný**, pokud není dosažitelný.

Příklad

Algoritmus pro eliminaci nedosažitelných stavů DFA

Vstup: Deterministický konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Výstup: Ekvivalentní automat \mathcal{M}' bez nedosažitelných stavů.

```
1:  $i := 0$ 
2:  $S_i := \{q_0\}$ 
3: repeat
4:    $S_{i+1} := S_i \cup \{q \mid \exists p \in S_i, a \in \Sigma : \delta(p, a) = q\}$ 
5:    $i := i + 1$ 
6: until  $S_i = S_{i-1}$ 
7:  $Q' := S_i$ 
8:  $\mathcal{M}' := (Q', \Sigma, \delta|_{Q' \times \Sigma}, q_0, F \cap Q')$ 
```

Korektnost: algoritmus je správný a konečný.

Příklad

Eliminace ekvivalentních stavů

Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA bez nedosažitelných stavů, jehož přechodová funkce je totální.

Definice 2.32. Stavy p, q nazveme **jazykově ekvivalentní**, psáno $p \equiv q$, pokud

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F).$$

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)$$

Definice 2.34. Reduktem automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme konečný automat $\mathcal{M}/\equiv = (Q/\equiv, \Sigma, \eta, [q_0], F/\equiv)$, kde

- stavy jsou třídy rozkladu Q/\equiv (třída obsahující stav q je $[q]$),
- přechodová funkce η je funkce splňující

$$\forall p, q \in Q, \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) = p \implies \eta([q], a) = [p],$$

- počáteční stav je třída rozkladu Q/\equiv obsahující stav q_0 ,
- koncové stavy jsou právě ty třídy rozkladu Q/\equiv , které obsahují alespoň jeden koncový stav.

Věta 2.37. Necht' $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA bez nedosažitelných stavů s totální přechodovou funkcí. Pak $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}/\equiv)$.

Algoritmus konstrukce minimálního automatu

Definice 2.38. Pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ definujeme binární relaci \equiv_i na Q předpisem

$$p \equiv_i q \iff \forall w \in \Sigma^* : (|w| \leq i \implies (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F))$$

- $p \equiv_i q \iff p$ a q nelze „rozlišit“ žádným slovem délky $\leq i$
- $p \equiv q \iff p \equiv_i q$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$, tedy $\equiv = \bigcap_{i=0}^{\infty} \equiv_i$
- 1. $\equiv_0 = \{(p, q) \mid p \in F \iff q \in F\}$
2. $\equiv_{i+1} = \{(p, q) \mid p \equiv_i q \wedge \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$

Algoritmus konstrukce minimálního automatu

Vstup: Deterministický konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ bez nedosažitelných stavů a s totální přechodovou funkcí.

Výstup: Redukt \mathcal{M}/\equiv .

- 1: $i := 0$
- 2: $\equiv_0 := \{(p, q) \mid p \in F \iff q \in F\}$
- 3: **repeat**
- 4: $\equiv_{i+1} := \{(p, q) \mid p \equiv_i q \wedge \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$
- 5: $i := i + 1$
- 6: **until** $\equiv_i = \equiv_{i-1}$
- 7: $\equiv := \equiv_i$
- 8: $\mathcal{M}/\equiv := (Q/\equiv, \Sigma, \eta, [q_0], F/\equiv)$

Korektnost algoritmu: důkaz vynechán.

Intuice

Příklad

	\mathcal{M}	a	b
→	1	2	—
	2	3	4
←	3	6	5
	4	3	2
←	5	6	3
←	6	2	—
	7	6	1

	\mathcal{M}'	a	b
→	1	2	N
	2	3	4
←	3	6	5
	4	3	2
←	5	6	3
←	6	2	N
	N	N	N

	\equiv_0	a	b
I	1	I	I
	2	II	I
	4	II	I
	N	I	I
II	3	II	II
	5	II	II
	6	I	I

Příklad

	\equiv_1	a	b
I	1	II	I
	N	I	I
II	2	III	II
	4	III	II
III	3	IV	III
	5	IV	III
IV	6	II	I

	\equiv_2	a	b
I	1	III	II
II	N	II	II
III	2	IV	III
	4	IV	III
IV	3	V	IV
	5	V	IV
V	6	III	II

	\mathcal{M}/\equiv	a	b
	I	III	II
	II	II	II
	III	IV	III
←	IV	V	IV
←	V	III	II

Kanonický tvar konečných automatů

Motivace

\mathcal{M}_1	a	c	b
I	IV	III	I
→ II	V	III	III
← III	II	I	I
← IV	V	I	II
V	II	V	V

\mathcal{M}_2	a	b	c
→ I	III	V	V
II	IV	II	V
III	I	III	III
← IV	III	I	II
← V	I	II	II

Kanonický tvar konečných automatů

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
I	IV	III	I
→ II	V	III	III
← III	II	I	I
← IV	V	I	II
V	II	V	V

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→ A			
B			
C			
D			
E			

Rozšíření konečných automatů I

Nedeterministické konečné automaty

Definice 2.42. Nedeterministický konečný automat (NFA) je $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde význam všech složek je stejný jako v definici DFA s výjimkou přechodové funkce δ . Ta je definována jako (totální) zobrazení $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$.

Rozšířená přechodová funkce $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, w)} \delta(p, a)$

Jazyk přijímaný nedeterministickým konečným automatem \mathcal{M} definujeme

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Příklad

Ekvivalence DFA a NFA

Věta 2.43. Pro každý NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ existuje ekvivalentní deterministický konečný automat.

Důkaz. Definujeme DFA $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$

- $Q' = 2^Q$, tj. stavy automatu \mathcal{M}' jsou všechny podmnožiny Q .
- $\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$.
- Množina koncových stavů F' je tvořena právě těmi podmnožinami Q , které obsahují nějaký prvek množiny F .

Korektnost

■ \mathcal{M}' je deterministický konečný automat.

■ \mathcal{M} a \mathcal{M}' jsou ekvivalentní:

indukcí k délce $w \in \Sigma^*$ dokážeme $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}'(\{q_0\}, w)$

Základní krok $|w| = 0$: Platí $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\} = \hat{\delta}'(\{q_0\}, \varepsilon)$.

Indukční krok: Nechť $w = va$, pak

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0, va) &= \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, v)} \delta(p, a) = \delta'(\hat{\delta}(q_0, v), a) \quad (\text{viz definice } \delta') \\ &= \delta'(\hat{\delta}'(\{q_0\}, v), a) \quad (\text{indukční předpoklad}) = \hat{\delta}'(\{q_0\}, va).\end{aligned}$$

Pak $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$, neboť

$$w \in L(\mathcal{M}) \iff \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \iff$$

$$\hat{\delta}'(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset \iff \hat{\delta}'(\{q_0\}, w) \in F' \iff w \in L(\mathcal{M}'). \quad \square$$

Algoritmus transformace NFA na ekvivalentní DFA

Vstup: Nedeterministický konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Výstup: Ekvivalentní DFA $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$
bez nedosažitelných stavů a s totální přechodovou funkcí.

```
1:  $Q' := \{\{q_0\}\}; \delta' := \emptyset; F' := \emptyset; Done := \emptyset;$ 
2: while  $(Q' \setminus Done) \neq \emptyset$  do
3:    $M :=$  libovolný prvek množiny  $Q' \setminus Done$ 
4:   If  $M \cap F \neq \emptyset$  then  $F' := F' \cup \{M\}$  end if
5:   for all  $a \in \Sigma$  do
6:      $N := \bigcup_{p \in M} \delta(p, a)$ 
7:      $Q' := Q' \cup \{N\}$ 
8:      $\delta' := \delta' \cup \{((M, a), N)\}$ 
9:   end for
10:   $Done := Done \cup \{M\}$ 
11: end while
12:  $\mathcal{M}' := (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ 
```

Důsledky determinizace konečných automatů

Věta 2.44. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje NFA o n stavech takový, že ekvivalentní DFA má i po minimalizaci 2^n stavů.

Důkaz. vynechán.

Rozšíření konečných automatů II

Automaty s ε -kroky

Definice 2.46. **Nedeterministický konečný automat s ε -kroky** je $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde význam všech složek je stejný jako v definici NFA s výjimkou přechodové funkce δ . Ta je definována jako totální zobrazení $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$.

Rozšířená přechodová funkce

Definujeme funkci $D_\varepsilon : Q \rightarrow 2^Q$ následujícím předpisem.

$D_\varepsilon(p)$ je nejmenší množina $X \subseteq Q$ taková, že platí:

- $p \in X$,
- pokud $q \in X$ a $r \in \delta(q, \varepsilon)$, pak také $r \in X$.

Rozšíření funkce D_ε na množiny stavů: pro $Y \subseteq Q$ položíme

$$D_\varepsilon(Y) = \bigcup_{q \in Y} D_\varepsilon(q).$$

Příklad - výpočet D_ε

Definice rozšířené přechodové funkce $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = D_\varepsilon(q),$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, w)} D_\varepsilon(\delta(p, a)).$

Lemma 2.47. V přechodovém grafu automatu \mathcal{M} existuje cesta $p_1 \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} p_m \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} q_n$, kde $m, n \geq 1$, $a \in \Sigma$, právě když $q_n \in \hat{\delta}(p_1, a)$.

Jazyk přijímaný automatem \mathcal{M} s ε -kroky definujeme

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Příklad - výpočet rozšířené přechodové funkce pro automat s ε -kroky

Ekvivalence automatů s ε -kroky a NFA

Věta 2.48. Ke každému NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s ε -kroky existuje ekvivalentní NFA (bez ε -kroků).

Důkaz. Konstrukce $\overline{\mathcal{M}} = (Q, \Sigma, \gamma, q_0, G)$ bez ε -kroků:

$$\gamma(q, a) = \hat{\delta}(q, a) \text{ pro každé } q \in Q, a \in \Sigma$$

$$G = \begin{cases} F & \text{pokud } D_\varepsilon(q_0) \cap F = \emptyset \\ F \cup \{q_0\} & \text{jinak} \end{cases}$$

Korektnost: Dokážeme, že pro libovolné $p \in Q, w \in \Sigma^+$ platí $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\gamma}(p, w)$ (indukcí vzhledem k délce slova w).

Algoritmus:



Uzavěrové vlastnosti regulárních jazyků

Věta 2.49. a 2.51. Třída regulárních jazyků je uzavřená na **sjednocení, průnik, rozdíl a komplement**.

Důkaz. synchronní paralelní kompozice automatů + komplement. □

Příklad.

$$L_1 = \{a^i b^j c^j \mid 2i \geq j \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a\}^* \cdot \{b\}^*$$

$$L_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$L_1 \cap L_2 = L_3$$

Jazyk L_2 je regulární, L_3 není regulární $\implies L_1$ **není regulární**.

Věta 2.52. Třída regulárních jazyků je uzavřená na **zřetězení**.

Důkaz.

Nechť L_1 a L_2 jsou regulární jazyky, rozpoznávané NFA

$\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$ a $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$, kde $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Definujeme NFA s ε -kroky $\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_1, F_2)$, kde

$$\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{((p, \varepsilon), \{q_2\}) \mid p \in F_1\}.$$

Korektnost: Chceme dokázat $L(\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2) = L(\mathcal{M}_1).L(\mathcal{M}_2)$

\supseteq : Necht' $u \in L(\mathcal{M}_1)$, tedy $\exists r \in F_1$ splňující $r \in \hat{\delta}_1(q_1, u)$.

Necht' $v \in L(\mathcal{M}_2)$, tedy $\hat{\delta}_2(q_2, v) \cap F_2 \neq \emptyset$. Pak

$$\hat{\delta}(q_1, uv) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_1, u)} \hat{\delta}(p, v) \supseteq \hat{\delta}(r, v) \supseteq \hat{\delta}(q_2, v) = \hat{\delta}_2(q_2, v).$$

Protože $\hat{\delta}_2(q_2, v) \cap F_2 \neq \emptyset$, tak $\hat{\delta}(q_1, uv) \cap F_2 \neq \emptyset$.

Tedy $uv \in L(\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2)$.

\subseteq :



Věta 2.53. Třída regulárních jazyků je uzavřená na **iteraci**.

Důkaz.

Nechť L je regulární jazyk akceptovaný NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Definujeme NFA s ε -kroky $\mathcal{M}_* = (Q \cup \{p\}, \Sigma, \delta', p, \{p\})$, kde $p \notin Q$ a

$$\delta' = \delta \cup \{((p, \varepsilon), \{q_0\})\} \cup \{((q, \varepsilon), \{p\}) \mid q \in F\}.$$



Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků - Shrnutí