

# Příklad

$\mathcal{M} = (\{q_0, p, f\}, \{a, b\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_0, Z, \{f\})$ , kde

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$$

$$\delta(q_0, a, B) = \{(q_0, AB)\}$$

$$\delta(q_0, b, Z) = \{(q_0, BZ)\}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{(q_0, BA)\}$$

$$\delta(q_0, b, B) = \{(q_0, BB)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z) = \{(p, Z)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, A) = \{(p, A)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, B) = \{(p, B)\}$$

$$\delta(p, a, A) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, b, B) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, \varepsilon, Z) = \{(f, Z)\}$$

# Příklad

$\mathcal{M} = (\{q_0\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \emptyset)$ , kde

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, A)\}$$

$$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$$

$$\delta(q_0, b, A) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$

# Ekvivalence dvou způsobů akceptování

**Věta 3.39.** Pro každý jazyk  $L$  platí:

$L = L(\mathcal{N})$  pro nějaký PDA  $\mathcal{N}$   $\iff$   $L = L_e(\mathcal{M})$  pro nějaký PDA  $\mathcal{M}$

**Důkaz. koncový stav  $\implies$  prázdný zásobník**

**Intuice:**

K danému  $\mathcal{N}$  zkonstruujeme  $\mathcal{M}$  simulující jeho činnost.

Vejde-li  $\mathcal{N}$  do koncového stavu,  $\mathcal{M}$  se nedeterministicky rozhodne

- pokračovat v simulaci automatu  $\mathcal{N}$  **nebo**
- přejít do nově přidaného stavu  $q_\epsilon$ , v němž vyprázdní zásobník.

**Komplikace:**

**Řešení:** Před zahájením simulace bude u  $\mathcal{M}$  na dně zásobníku nový symbol, který nedovolíme odstranit jinde, než ve stavu  $q_\epsilon$ .

**Konstrukce:** Necht'  $\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ .

Klademe  $\mathcal{M} = (Q \cup \{q'_0, q_\varepsilon\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z'\}, \delta', q'_0, Z', \emptyset)$ ,  
kde  $Z' \notin \Gamma$ ,  $q'_0, q_\varepsilon \notin Q$  a  $\delta'$  je definována takto:

- $\delta'(q'_0, \varepsilon, Z') = \{(q_0, Z_0Z')\}$
- jestliže  $\delta(q, a, Z)$  obsahuje  $(r, \gamma)$ , pak  $\delta'(q, a, Z)$  obsahuje  $(r, \gamma)$
- $\delta'(q, \varepsilon, Z)$  obsahuje  $(q_\varepsilon, Z)$   
pro všechny  $q \in F$  a  $Z \in \Gamma \cup \{Z'\}$
- $\delta'(q_\varepsilon, \varepsilon, Z) = \{(q_\varepsilon, \varepsilon)\}$   
pro všechny  $Z \in \Gamma \cup \{Z'\}$

**Korektnost:**

**prázdný zásobník  $\implies$  koncový stav**

**Intuice:**

K danému  $\mathcal{M}$  zkonstruujeme  $\mathcal{N}$  simulující jeho činnost.

- $\mathcal{N}$  si před simulací přidá na dno zásobníku nový symbol.
- Je-li  $\mathcal{N}$  schopen číst tento symbol (tj. zásobník automatu  $\mathcal{M}$  je prázdný) tak  $\mathcal{N}$  přejde do nově přidaného stavu  $q_f$ , který je koncovým stavem.

**Konstrukce:** Necht'  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ .

Klademe  $\mathcal{N} = (Q \cup \{q'_0, q_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z'\}, \delta', q'_0, Z', \{q_f\})$ ,  
kde  $Z' \notin \Gamma$ ,  $q'_0, q_f \notin Q$  a  $\delta'$  je definována takto:

- $\delta'(q'_0, \varepsilon, Z') = \{(q_0, Z_0 Z')\}$
  
- jestliže  $\delta(q, a, Z)$  obsahuje  $(r, \gamma)$ , pak  $\delta'(q, a, Z)$  obsahuje  $(r, \gamma)$
- $\delta'(q, \varepsilon, Z') = \{(q_f, \varepsilon)\}$   
pro všechny  $q \in Q$





# Grafická reprezentace konfigurací

# Rozšířený zásobníkový automat

**Definice 3.44.** Rozšířený zásobníkový automat je sedmice

$\mathcal{R} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , kde

- všechny symboly až na  $\delta$  mají tentýž význam jako v definici PDA,
- $\delta$  je zobrazením  
z konečné podmnožiny množiny  $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^*$   
do konečných podmnožin množiny  $Q \times \Gamma^*$ .

Pojmy konfigurace a akceptovaný jazyk (koncovým stavem, prázdným zásobníkem) zůstávají beze změny. **Krok výpočtu**  $\vdash_{\mathcal{R}}$  definujeme takto:

$$(p, aw, \gamma_1 \alpha) \vdash_{\mathcal{R}} (q, w, \gamma_2 \alpha) \stackrel{def}{\iff} \exists (q, \gamma_2) \in \delta(p, a, \gamma_1) \text{ pro } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$$

# Příklad

$\mathcal{R} = (\{q_0, p, f\}, \{a, b, c, d\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_0, Z, \{f\})$ , kde

$$\delta(q_0, a, \varepsilon) = \{(q_0, A)\}$$

$$\delta(q_0, b, \varepsilon) = \{(q_0, B)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, a, A) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, b, B) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, c, AA) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, c, BBB) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, d, Z) = \{(f, \varepsilon)\}$$

# Ekvivalence rozšířených PDA a PDA

**Lemma 3.45.** Ke každému rozšířenému PDA existuje ekvivalentní (*obyčejný*) PDA.

**Intuice:**

**Důkaz.** Necht'  $\mathcal{R} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  je rozšířený PDA a  $m = \max\{|\alpha| \mid \delta(q, a, \alpha) \text{ je definováno pro nějaké } q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\}$ .

Definujeme  $\mathcal{P} = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_1, Z_1, F_1)$ , kde

- $Q_1 = \{[q, \alpha] \mid q \in Q, \alpha \in \Gamma_1^*, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ ,
- $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{Z_1\}$ , kde  $Z_1$  je nový symbol,
- $q_1 = [q_0, Z_0 Z_1^{m-1}]$ ,
- $F_1 = \{[q, \alpha] \mid q \in F, \alpha \in \Gamma_1^*, 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ .

■  $\delta_1$  je definována takto:

– jestliže  $\delta(q, a, X_1 \dots X_k)$  obsahuje  $(r, Y_1 \dots Y_l)$ , pak

$l \geq k$ :  $\delta_1([q, X_1 \dots X_k \alpha], a, Z)$  obsahuje  $([r, \beta], \gamma Z)$ ,  
kde  $\beta\gamma = Y_1 \dots Y_l \alpha$  a  $|\beta| = m$ ,

pro všechny  $Z \in \Gamma_1$  a  $\alpha \in \Gamma_1^*$  takové, že  $|\alpha| = m - k$

$l < k$ :  $\delta_1([q, X_1 \dots X_k \alpha], a, Z)$  obsahuje  $([r, Y_1 \dots Y_l \alpha Z], \varepsilon)$   
pro všechny  $Z \in \Gamma_1$  a  $\alpha \in \Gamma_1^*$  takové, že  $|\alpha| = m - k$

–  $\delta_1([q, \alpha], \varepsilon, Z) = \{([q, \alpha Z], \varepsilon)\}$

pro všechny  $q \in Q$ ,  $Z \in \Gamma_1$  a  $\alpha \in \Gamma_1^*$  takové, že  $|\alpha| < m$

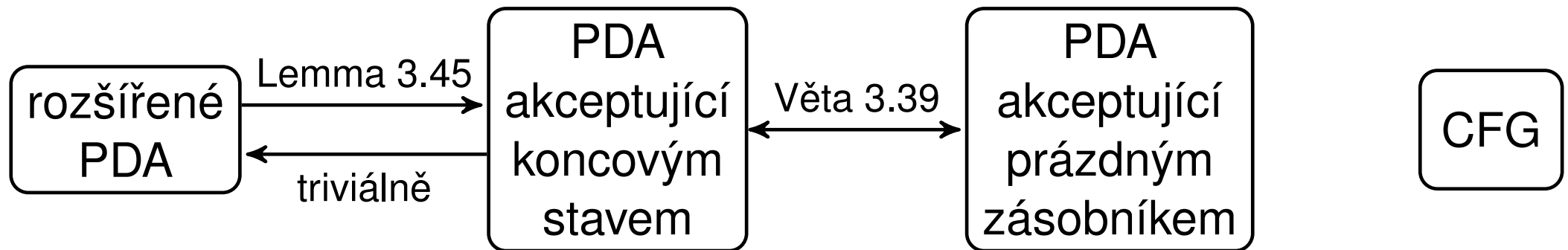
**Korektnost:** Ověříme, že platí

$$(q, aw, X_1 \dots X_k X_{k+1} \dots X_n) \xrightarrow{\mathcal{R}} (r, w, Y_1 \dots Y_l X_{k+1} \dots X_n)$$
$$\iff ([q, \alpha], aw, \beta) \xrightarrow{\mathcal{P}^+} ([r, \alpha'], w, \beta'),$$

kde

- 1  $\alpha\beta = X_1 \dots X_n Z_1^m,$
- 2  $\alpha'\beta' = Y_1 \dots Y_l X_{k+1} \dots X_n Z_1^m,$
- 3  $|\alpha| = |\alpha'| = m$  a
- 4 mezi dvěma výše uvedenými konfiguracemi PDA  $\mathcal{P}$  neexistuje taková konfigurace, kde druhá komponenta stavu (tj. buffer) by měla délku  $m$ . □

# Zásobníkové automaty a bezkontextové jazyky





# Zásobníkové automaty a bezkontextové jazyky

**Motivace 1:** Jaká je třída jazyků rozpoznávaných zásobníkovými automaty?

**Motivace 2:** Je dána bezkontextová gramatika  $\mathcal{G}$  a slovo  $w$ .  
Jak zjistit, zda se slovo  $w$  dá vygenerovat v gramatice  $\mathcal{G}$ ?

**Problém syntaktické analýzy pro bezkontextové gramatiky:**  
pro danou bezkontextovou gramatiku  $\mathcal{G}$  a slovo  $w$  rozhodnout,  
zda  $w \in L(\mathcal{G})$ .

# Ekvivalence bezkontextových gramatik a zásobníkových automatů

**Věta 3.51.** Ke každému PDA  $\mathcal{M}$  lze sestavit CFG  $\mathcal{G}$  takovou, že  $L_e(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$ .

**Důkaz.** Vynechán. □

**Věta 3.47.** Ke každé CFG  $\mathcal{G}$  lze sestavit PDA  $\mathcal{M}$  takový, že  $L(\mathcal{G}) = L_e(\mathcal{M})$ .

**Důkaz.** Uvedeme za chvíli. □

**Důsledek 3.52.** Třída jazyků rozpoznávaných zásobníkovými automaty je právě třída bezkontextových jazyků.

# Intuice převodu PDA na CFG

1.  $|Q| = 1$

# Intuice převodu PDA na CFG

2.  $|Q| \geq 2$

# Intuice převodu CFG na PDA

Konstrukce PDA řeší problém syntaktické analýzy.  
(Platí pro dané  $\mathcal{G}$  a  $w$ :  $w \in L(\mathcal{G})$ ?)

$w \in L(\mathcal{G}) \iff$  v  $\mathcal{G}$  existuje derivační strom s výsledkem  $w$

# Intuice převodu CFG na PDA

## aneb O nedeterministické syntaktické analýze

PDA se bude snažit budovat derivační strom pro  $w$ .

shora dolů

zdola nahoru

# Intuice pro analýzu shora dolů

Budování derivačního stromu simuluje levé derivace, tj. vždy rozvíjíme nejlevější neterminál.

# Nedeterministická syntaktická analýza shora dolů

**Věta 3.47.** Ke každé CFG  $\mathcal{G}$  lze sestavit PDA  $\mathcal{M}$  takový, že  $L(\mathcal{G}) = L_e(\mathcal{M})$ .

**Důkaz.** K dané gramatice  $\mathcal{G}$  konstruujeme PDA  $\mathcal{M}$ , který simuluje levé derivace v  $\mathcal{G}$ .

- V levé derivaci je v jednom kroku odvození nahrazen (nejlevější) neterminál  $A$  pravou stranou  $X_1 \dots X_n$  nějakého  $A$ -pravidla.
- V  $\mathcal{M}$  této situaci odpovídá náhrada  $A$  na vrcholu zásobníku řetězem  $X_1 \dots X_n$ .

$\mathcal{M} = (\{q\}, \Sigma, N \cup \Sigma, \delta, q, S, \emptyset)$ , kde  $\delta$  je definována:

- $\delta(q, \varepsilon, A)$  obsahuje  $(q, \alpha)$  právě když  $A \rightarrow \alpha \in P$
- $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$  pro všechna  $a \in \Sigma$



$S \rightarrow aAB$

$A \rightarrow Aa \mid \varepsilon$

$B \rightarrow SaA \mid b$

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, aAB)\}$

$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, Aa), (q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, SaA), (q, b)\}$

$\delta(q, a, a) = \delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$

---

$S \Rightarrow aAB$

$\Rightarrow aB$

$\Rightarrow aSaA$

$\Rightarrow aaABaA$

$\Rightarrow aaBaA$

$\Rightarrow aabaA$

$\Rightarrow aaba$

# Korektnost

$$A \Rightarrow^* w \iff (q, w, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

( $\implies$ ) Indukcí vzhledem k délce odvození  $m$ .

■  $m = 1$ : zřejmé.

■  $m > 1$ : necht' tvrzení platí pro všechna  $m' < m$ .

$A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_k \Rightarrow^* x_1 x_2 \dots x_k = w$ , kde  $X_i \xRightarrow{m_i} x_i$ ,  $0 \leq m_i < m$   
z definice  $\delta$  plyne  $(q, w, A) \vdash (q, w, X_1 X_2 \dots X_k)$ .

Je-li  $X_i \in N$ , pak dle indukčního předpokladu máme

$$(q, x_i, X_i) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Je-li  $X_i \in \Sigma$ , pak  $X_i = x_i$  a z definice  $\delta$  plyne  $(q, x_i, x_i) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Kompozicí dostáváme  $(q, w, A) \vdash^+ (q, \varepsilon, \varepsilon)$ .

( $\Leftarrow$ ) Předpokládejme  $(q, w, A) \stackrel{n}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$  a ukažme  $A \Rightarrow^+ w$ .  
Indukcí vzhledem k délce výpočtu  $n$ .

■  $n = 1$ : zřejmé.

■  $n > 1$ : necht' tvrzení platí pro všechna  $n' < n$ .

$(q, w, A) \vdash (q, w, X_1 X_2 \dots X_k)$ , tj.  $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_k \in P$

$w$  můžeme napsat jako  $w = x_1 x_2 \dots x_k$  takové, že

■ je-li  $X_i \in N$ , pak  $(q, x_i, X_i) \stackrel{n_i}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ , kde  $n_i < n$ .

Dle IP  $X_i \Rightarrow^+ x_i$ .

■ je-li  $X_i \in \Sigma$ , pak  $X_i \stackrel{0}{\Rightarrow} x_i$ .

Vhodnou kompozicí obdržíme

$A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_k \Rightarrow^* x_1 X_2 \dots X_k \Rightarrow^* x_1 \dots x_k = w$

což je levá derivace slova  $w$  v gramatice  $\mathcal{G}$ . □