MA002 Matematická analýza
Skúšková písomka – x termín xx. xx. xxx

Meno, priezvisko: .... **UČO:** ....

T1–T5	P1	P2	P3	P4	P5	Σ_T	Σ_P	Z	$\boldsymbol{\Sigma\Sigma}$

TEORETICKÁ ČASŤ

Za každú správnu odpoveď je možné získať **2 body**.

T1 (**ÁNO/NIE**) Nech n je pevné prirodzené číslo a nech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matica. Potom funkcia $Y(t) = \mathrm{e}^{At}$ je jediné riešenie začiatočnej úlohy

$$Y' = AY, \quad Y(0) = I$$

na intervale $(-\infty, \infty)$, kde I je jednotková matica rádu n.

T2 (**ÁNO/NIE**) Každá uzavretá krivka sa nazýva Jordanova krivka.

T3 (**ÁNO/NIE**) Nech $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je po častiach hladká orientovaná krivka a nech $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Nech existuje krivkový integrál I. druhu $\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s$. Potom platí

$$\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t.$$

T4 (**ÁNO/NIE**) Komplexná funkcia $f(z) = \log z$ je holomorfná na množine $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

T5 (**ÁNO/NIE**) Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a f je komplexná funkcia definovaná na G. Funkcia $F : G \to \mathbb{C}$ sa nazýva primitívna k funkcii f, ak platí

$$F(z) = f'(z) \quad \text{pre každé } z \in G.$$

PRAKTICKÁ ČASŤ

P1 (15 bodov) Nájdite všeobecné riešenie systému diferenciálnych rovníc

$$x' = x - y, \quad y' = x - z, \quad z' = x.$$

P2 (12 bodov) Stanovte krivkový integrál

$$\oint_{\varphi} \left[\frac{(x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \right],$$

kde φ je záporne orientovaná kružnica s rovnicou $x^2 + y^2 = 4$.

P3 (15 bodov) Určte holomorfnú funkciu f spĺňajúcu

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + xy, \quad f(0) = 0.$$

Získaný výraz pre $f(x+\mathrm{i}y)$ vyjadrite iba pomocou komplexnej premennej $z = x + \mathrm{i}y$!

P4 (8 bodov) Vypočítajte komplexný integrál

$$\int_{\varphi} \frac{\sin z}{z + \mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$$

pozdĺž kladne orientovanej uzavretej cesty φ s vyjadrením $|z + \mathrm{i}| = 1$. Hodnotu integrálu (ako komplexné číslo) upravte na algebraický tvar!

P5 (10 bodov) Nájdite Laurentov rozvoj funkcie $g(z) = z\cos(1/z)$ v okolí bodu 0 a stanovte jeho maximálne medzikružie konvergencie. Pomocou týchto výsledkov potom určte hodnotu komplexného integrálu

$$\int_{\varphi} z\cos\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z,$$

kde φ je kladne orientovaná kružnica s vyjadrením $|z| = 2$.