Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu

Peter Šepitka

podzim 2015

Obsah

Obsah

Základné pojmy

Nech $F : M \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je daná funkcia. Rovnica

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \text{kde} \quad ' := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \tag{1}$$

sa nazýva obyčajná diferenciálna rovnica prvého rádu. Riešenie (integrál) rovnice (1) je každá funkcia $y = \varphi(x)$, ktorá má deriváciu na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ a pre $\forall x \in \mathcal{I}$ platí

$$[x, \varphi(x), \varphi'(x)] \subseteq M \qquad \text{a} \qquad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

Graf funkcie $y = \varphi(x)$, t.j., množina $\{[x, y] \subseteq \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{I},\ y = \varphi(x)\}$, sa nazýva integrálna krivka rovnice (1). V prípade, ak je možné upraviť rovnicu (1) na tvar

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

kde $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkcia, rovnica (2) sa nazýva ODR I. rádu rozriešená vzhľadom na deriváciu. Rovnica (1) sa nazýva nerozriešená vzhľadom na deriváciu.

- Začiatočná (Cauchyho) úloha (problém) – hľadáme riešenie $y = \varphi(x)$ rovnice (2), ktorého integrálna krivka prechádza pevne zvoleným bodom $[x_0, y_0] \in D$, t.j.,
$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3}$$
Riešenie úlohy (3) sa nazýva partikulárne riešenie rovnice (2).
- Všeobecné riešenie rovnice (2) – funkcia $y = \varphi(x, C)$ závislá na jednom reálnom parametri C, pomocou ktorej možno vhodnou voľbou C získať riešenie každej úlohy (3) (t.j., pre každú voľbu $[x_0, y_0] \in D$).
- Úplné (maximálne) riešenie – problém predlžovania riešení úlohy (3).
- Singulárne riešenie – porušená jednoznačnosť úlohy (3) v každom bode integrálnej krivky.

Príklad 1

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Funkcia $y = Cx$ je všeobecné riešenie uvedenej rovnice na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Každá začiatočná úloha

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(x_0) = y_0$$

totiž spĺňa $x_0 \neq 0$ a funkcia $y = C_0 x$ pre $C_0 = y_0/x_0$ je jej riešením na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Zároveň je to jediné a úplné riešenie tejto začiatočnej úlohy na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Príklad 2

$$y' = -y^2.$$

Funkcia $y = (x + C)^{-1}$ je pre každé $C \in \mathbb{R}$ jediným a úplným riešením uvedenej rovnice na intervaloch $(-\infty, -C)$ a $(-C, \infty)$, avšak nie je to všeobecné riešenie tejto rovnice, pretože nevyčerpáva napr. riešenie začiatočnej úlohy

$$y' = -y^2, \quad y(1) = 0.$$

Táto začiatočná úloha má jediné a úplné riešenie $y = 0$ na celej reálnej osi.

Príklad 3

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$$

Funkcie $y = 0$ a $y = x^3$ sú dve rôzne úplné riešenia tejto začiatočnej úlohy. Riešenie $y = 0$ je zároveň singulárnym riešením danej rovnice.

Veta 1 (Existencia a jednoznačnosť riešení)

Nech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *je oblasť a* $[x_0, y_0] \in D$ *je daný bod. Uvažujme začiatočnú úlohu*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{4}$$

kde funkcia f *je definovaná na* D. *Platí:*

1. *Ak* f *je spojitá na* D, *potom existuje interval* $\mathcal{I}$ *a funkcia* φ *tak, že* $y = \varphi(x)$ *je riešenie úlohy* (4) *na* $\mathcal{I}$.
2. *Ak naviac i* $\partial f / \partial y$ *je spojitá na* D, *potom pre každé riešenie* $y = \psi(x)$ *úlohy* (4) *definované na intervale* $\mathcal{J}$ *platí*

$$\psi(x) = \varphi(x) \quad \text{pre } \forall x \in \mathcal{J} \cap \mathcal{I}.$$

Niektoré špeciálne typy ODR I. rádu

- ODR so separovateľnými premennými

$$y' = g(x)\, h(y). \tag{5}$$

- Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu

$$y' = p(x)\, y + q(x). \tag{6}$$

- Bernoulliho diferenciálna rovnica

$$y' = p(x)\, y + q(x)\, y^k, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \tag{7}$$

- Exaktná diferenciálna rovnica

$$M(x, y)\, \mathrm{d}x + N(x, y)\, \mathrm{d}y = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{8}$$

Obsah

Definícia a základné pojmy

Nech $n \in \mathbb{N}$. Súbor rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \cdots + a_{2n}(t)\,x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{9}$$

kde a_{ij} a b_i, $i, j = 1, \cdots, n$ sú reálne funkcie definované a spojité na reálnom intervale $\mathcal{I}$ (pripúšťame aj $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$) a znak $'$ znamená $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, sa nazýva systém lineárnych diferenciálnych rovníc I. rádu. Ak $b_i \equiv 0$ na $\mathcal{I}$ pre každé $i = 1, \cdots, n$, systém (9) sa nazýva homogénny. V opačnom prípade, t.j., $b_i \not\equiv 0$ pre aspoň jedno $i = 1, \cdots, n$, hovoríme o nehomogénnom systéme.

Zavedením označenia

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

môžeme systém (9) prepísať do tzv. vektorového tvaru

$$x' = A(t)\,x + b(t). \tag{11}$$

Zobrazenia $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto b(t)$ a $t \mapsto x(t)$ sa nazývajú maticová (rádu n) a vektorové (n-vektorové) funkcie na intervale $\mathcal{I}$. Platia pre ne všetky známe vlastnosti matíc a vektorov. Limity, spojitosť, derivovanie a integrovanie sa realizujú vždy po jednotlivých maticových prvkoch, resp. vektorových zložkách.

Systém (11) sa nazýva homogénny, ak $b(t) \equiv 0$ na $\mathcal{I}$. V opačnom prípade je systém (11) nehomogénny a rovnica

$$x' = A(t)\, x$$

sa nazýva pridružený homogénny systém k nehomogénnemu systému (11).

Riešením systému (11) rozumieme každú n-vektorovú funkciu

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))^T$$

definovanú a diferencovateľnú na $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, ktorá spĺňa rovnicu (11) na $\mathcal{J}$, t.j.,

$$\varphi'(t) = A(t)\, \varphi(t) + b(t), \quad \forall t \in \mathcal{J}.$$

Začiatočná (Cauchyho) úloha

$$x' = A(t)\, x + b(t), \quad x(t_0) = \eta, \tag{12}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$ je pevný bod a $\eta \in \mathbb{R}^n$ je pevný vektor. Riešenie úlohy (12) sa nazýva aj partikulárne riešenie.

Existencia a jednoznačnosť riešení

Lema 1

Nech maticová funkcia A a vektorová funkcia b sú definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$. Potom funkcia φ je riešenie začiatočnej úlohy (12) *na celom $\mathcal{I}$ práve vtedy keď*

$$\varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{13}$$

Poznámka 1

Lema 1 vyjadruje ekvivalenciu medzi úlohou (12) a integrálnou rovnicou (13). Stačí sa preto obmedziť na vyšetrovanie rovnice (13).

Dôkaz Lemy 1.

Nech $t \in \mathcal{I}$. Ak φ je riešenie úlohy (12), t.j. platí

$$\varphi'(s) = A(s)\,\varphi(s) + b(s) \quad \text{na } \mathcal{I}, \tag{14}$$

potom integráciou oboch strán rovnice (14) od t_0 po t a využitím začiatočnej podmienky $\varphi(t_0) = \eta$ získame integrálnu rovnicu (13), nakoľko

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,\mathrm{d}s &= \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s, \\ \varphi(t) - \varphi(t_0) &= \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s, \\ \varphi(t) &= \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Naopak, nech φ je riešenie rovnice (13). Potom $\varphi(t_0) = \eta$ a funkcia φ je diferencovateľná na $\mathcal{I}$. Derivovaním oboch strán rovnice (13) podľa t dostaneme $\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + b(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. ∎

Veta 2 (Existencia a globálna jednoznačnosť riešení)

Nech maticová funkcia A a vektorová funkcia b sú definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$. Potom úloha (12), t.j., začiatočná úloha

$$x' = A(t)\,x + b(t), \quad x(t_0) = \eta$$

má pre každé $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$ práve jedno úplné riešenie, t.j., riešenie, ktoré existuje na celom $\mathcal{I}$. Toto riešenie možno vyjadriť ako limitu tzv. Picardovej postupnosti postupných aproximácií $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde pre každé $t \in \mathcal{I}$ platí

$$\varphi_0(t) \equiv 0, \quad \varphi_{k+1}(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi_k(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{15}$$

Poznámka 2

Tvrdenie Vety 2 zostane v platnosti, ak za začiatočnú Picardovu aproximáciu φ_0 zoberieme ľubovoľnú funkciu definovanú a spojitú na $\mathcal{I}$. Limitná funkcia postupnosti $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ nezávisí na výbere funkcie φ_0.

Dôkaz Vety 2 (náčrt).

1. **Existencia**
   Funkcie φ_k sú definované na celom $\mathcal{I}$ pre každé $k \in \mathbb{N}_0$. Ukážeme, že postupnosť $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje lokálne rovnomerne (skoro rovnomerne) na intervale $\mathcal{I}$. To zaručuje existenciu funkcie φ, ktorá je definovaná na celom $\mathcal{I}$ a spĺňa

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \varphi(t) \tag{16}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi_k(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s \tag{17}$$

   pre každé $t \in \mathcal{I}$. Z rovností (16) a (17) vyplýva, že φ rieši integrálnu rovnicu (13) na celom $\mathcal{I}$. Podľa Lemy 1 je potom funkcia φ riešením začiatočnej úlohy (12) na celom $\mathcal{I}$.

2. **Jednoznačnosť**
   Jednoznačnosť riešenia začiatočnej úlohy (12) na intervale $\mathcal{I}$ vyplýva z Gronwallovej lemy.

■

Príklad 4

Začiatočná úloha

$$x_1' = -\frac{x_2}{t} + 9t, \quad x_2' = -\frac{x_1}{t} - 3t, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 2$$

má na intervale $(0, \infty)$ jediné úplné riešenie, pretože funkcie

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 9t \\ -3t \end{pmatrix}$$

sú definované a spojité na celom intervale $(0, \infty)$ a bod $t_0 = 1 \in (0, \infty)$. Dá sa ukázať, že hľadaným riešením je dvojica

$$x_1(t) = 7t^2 - \frac{13}{2}t + \frac{1}{2t}, \quad x_2(t) = -5t^2 + \frac{13}{2}t + \frac{1}{2t}, \quad t \in (0, \infty).$$

Poznámka 3

Picardova metóda postupných aproximácií umožňuje podľa Vety 2 hľadať riešenie φ začiatočnej úlohy (12) ako limitu postupnosti $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$. Ak zavedieme funkcie Δ_k pre $k \in \mathbb{N}_0$ predpisom

$$\Delta_k(t) := \varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

potom je možné riešenie φ vyjadriť v tvare nekonečného radu

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{18}$$

Nekonečný funkcionálny rad (18) konverguje lokálne rovnomerne na intervale $\mathcal{I}$. Podľa Vety 2 funkcie Δ_k spĺňajú pre každé $t \in \mathcal{I}$

$$\Delta_0(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{d}s, \quad \Delta_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,\Delta_k(s)\,\mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{19}$$

Príklad 5

Uvažujme homogénnu začiatočnú úlohu

$$x' = Ax, \quad x(0) = (0,1)^T$$

na intervale $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$, kde A je reálna konštantná matica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa Poznámky 3 s $b(t) \equiv 0$ na $\mathcal{I}$, $t_0 = 0$ a $\eta = (0,1)^T$ pre funkcie Δ_k platí

$$\Delta_0(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{k+1}(t) = A \int_0^t \Delta_k(s)\,\mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Pomocou matematickej indukcie vzhľadom na index k možno ukázať

$$\Delta_k(t) = \frac{t^k}{k!} A^k \eta, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Príklad 5

Postupnosť matíc $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ je periodická s najmenšou periódou 4, nakoľko

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A.$$

Preto pre každé $l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$A^{4l} = I, \quad A^{4l+1} = A, \quad A^{4l+2} = -I, \quad A^{4l+3} = -A.$$

Riešenie φ začiatočnej úlohy potom bude mať podľa (18) pre každé $t \in \mathcal{I}$ tvar

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} \right) \eta + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} \right) A\eta \\ &= (\cos t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\sin t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obsah

Homogénny systém

Nech $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc

$$y' = A(t)\, y, \tag{20}$$

kde A je maticová funkcia rádu n definovaná a spojitá na intervale $\mathcal{I}$. Ak y_1 a y_2 sú dve (úplné) riešenia systému (20) a c_1, c_2 sú ľubovoľné reálne konštanty, potom aj funkcia $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ je (úplným) riešením rovnice (20), nakoľko

$$y' = (c_1 y_1 + c_2 y_2)' = c_1 y_1' + c_2 y_2' = c_1 A y_1 + c_2 A y_2 = A(c_1 y_1 + c_2 y_2) = Ay$$

na celom intervale $\mathcal{I}$. Táto vlastnosť je kľúčová pri skúmaní štruktúry množiny všetkých riešení systému (20).

Veta 3 (Štruktúra množiny riešení)

Množina všetkých riešení rovnice (20) *na intervale* $\mathcal{I}$ *tvorí lineárny (vektorový) priestor nad telesom reálnych čísiel.*

Lineárna závislosť a nezávislosť funkcií I

Definícia 1

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú funkcie definované na nedegenerovanom intervale $\mathcal{I}$. Povieme, že funkcie $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$, ak existuje nenulová k-tica reálnych konštánt $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ tak, že platí

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_k y_k(t) = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

V opačnom prípade sa funkcie $y_1, y_2, \ldots, y_k$ nazývajú lineárne nezávislé na $\mathcal{I}$.

Príklad 6

Ukážeme, že $2-$vektoré funkcie

$$y_1(t) = (t, t)^T, \quad y_2(t) = (t^2, t)^T, \quad y_3(t) = (t^3, t)^T$$

sú lineárne nezávislé na každom nedegenerovanom reálnom intervale. Nech $\mathcal{I}$ je takýto interval a nech $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ spĺňajú $c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \equiv 0$ na $\mathcal{I}$, t.j.,

Lineárna závislosť a nezávislosť funkcií II

Príklad 6

$$c_1 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

Trojnásobným derivovaním poslednej rovnosti podľa premennej t dostaneme

$$c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies c_3 = 0.$$

Podobne, dvojnásobné derivovanie uvedenej rovnosti spolu s $c_3 = 0$ implikuje

$$c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies c_2 = 0.$$

Teda $c_1(t,t)^T = 0$ na $\mathcal{I}$, z čoho máme i $c_1 = 0$. Preto sú funkcie y_1, y_2 a y_3 lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$.

Lineárna závislosť a nezávislosť riešení

V prípade riešení systému (20) sa vyšetrovanie lineárnej závislosti, resp. nezávislosti prevádza na problém lineárnej závislosti, resp. nezávislosti n-rozmerných reálnych vektorov.

Veta 4 (Lineárna závislosť riešení)

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú úplné riešenia systému (20). *Potom funkcie $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď aspoň pre jedno $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$ lineárne závislé.*

Dôkaz.

Implikácia $\Rightarrow$ platí triviálne podľa Definície 1. Naopak, nech pre $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_k(t_0)$ lineárne závislé. Teda existuje nenulová k-tica $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ tak, že $c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_k y_k(t_0) = 0$. Funkcia $y := c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k$ je riešením rovnice (20) a $y(t_0) = 0$. Z jednoznačnosti riešení podľa Vety 2 máme $y(t) \equiv 0$ na celom $\mathcal{I}$, čo následne znamená, že funkcie $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$. ∎

Dôsledok 1 (Dimenzia priestoru riešení)

Množina riešení rovnice (20) na intervale $\mathcal{I}$ tvorí lineárny priestor dimenzie n.

Dôkaz.

Z Vety 4 vieme, že dimenzia priestoru riešení je najviac n, pretože priestor $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionálny. Na druhej strane, táto dimenzia je aspoň n. Vyplýva to z nasledujúcej úvahy. Nech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je kanonická báza priestoru $\mathbb{R}^n$ a nech $t_0 \in \mathcal{I}$. Podľa Vety 2 existujú úplné riešenia $y_1, y_2, \ldots, y_n$ systému (20) s

$$y_i(t_0) = e_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Nakoľko vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_n(t_0)$ sú lineárne nezávislé, podľa Vety 4 riešenia $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sú lineárne nezávislé na $\mathcal{I}$. ∎

Fundamentálny systém riešení

Definícia 2 (Fundamentálny systém riešení)

Ľubovoľná báza priestoru všetkých riešení rovnice (20) sa nazýva fundamentálny systém riešení rovnice (20).

Ak $y_1, y_2, \dots, y_n$ je nejaký fundamentálny systém riešení rovnice (20), potom pre každé riešenie y sa dá vyjadriť v tvare

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \quad \text{na } \mathcal{I}, \tag{21}$$

pre vhodné konštanty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Naopak, každá lineárna kombinácia riešení $y_1, y_2, \dots, y_n$ je zrejme opäť riešením systému (20). Riešenie (21) sa preto nazýva všeobecné riešenie rovnice (20).

Príklad 7

Uvažujme systém

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix} y$$

na intervale $\mathcal{I} = (0, \infty)$. Dosadením sa ľahko ukáže, že 2-vektorové funkcie

$$y_1(t) = (t, -t)^T, \quad y_2(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right)^T$$

sú úplné riešenia tohto systému. Naviac, funkcie y_1 a y_2 sú lineárne nezávislé, pretože napr. vektory $y_1(1) = (1, -1)^T$ a $y_2(1) = (1, 1)^T$ sú lineárne nezávislé. Preto y_1 a y_2 tvoria fundamentálny systém riešení danej rovnice a jej všeobecné riešenie má pre každé $t \in \mathcal{I}$ tvar

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 t + \dfrac{c_2}{t} \\ -c_1 t + \dfrac{c_2}{t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Spolu s vektorovou rovnicou (20) sa súčasne uvažuje aj maticová rovnica

$$Y' = A(t)Y, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{22}$$

kde nezáma Y je maticová funkcia rádu n. Ak Y je maticové riešenie rovnice (22) na $\mathcal{I}$ a $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je konštantná matica, potom funkcia YC je riešením rovnice (22) na $\mathcal{I}$, nakoľko platí

$$(YC)' = Y'C = AYC = A(YC) \quad \text{na } \mathcal{I}.$$

Podobne, pre každý konštantný vektor $\eta \in \mathbb{R}^n$ je funkcia $Y\eta$ riešením rovnice (20). Obzvlášť, každý stĺpec matice Y je riešením systému (20). Maticové riešenie Y sa nazýva fundamentálne riešenie systému (22) (resp. fundamentálna matica systému (20)), ak stĺpce matice Y tvoria fundamentálny systém riešení rovnice (20), t.j., sú lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$. Preto riešenie Y rovnice (22) je fundamentálne riešenie práve vtedy, keď $\det Y(t) \neq 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$.

Veta 5 (Liouvilleov-Jacobiho vzorec)

Nech Y *je maticové riešenie rovnice* (22) *na intervale* $\mathcal{I}$ *a nech* $t_0 \in \mathcal{I}$. *Označme* $A(t) = (a_{ij}(t))$. *Potom pre každé* $t \in \mathcal{I}$ *platí*

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\,\mathrm{d}s\right), \tag{23}$$

kde $\operatorname{Tr} A(s) = a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)$ *je stopa matice* $A(s)$.

Dôkaz (náčrt).

Využitím definície determinantu štvorcovej matice sa dá ukázať, že funkcia $z = \det Y$ vyhovuje na intervale $\mathcal{I}$ homogénnej LDR prvého rádu

$$z' = \operatorname{Tr} A(t)\, z.$$

Riešením tejto rovnice dostaneme pre funkciu z vyjadrenie v tvrdení, t.j.,

$$z(t) = z(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\,\mathrm{d}s\right), \quad t \in \mathcal{I}.$$

■

Poznámka 4

Z Liouvilleovho-Jacobiho vzorca vyplýva, že pre každé maticové riešenie rovnice (22) platí buď $\det Y(t) \neq 0$ alebo $\det Y(t) = 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Preto Y je fundamentálnym riešením práve vtedy, keď $\det Y(t_0) \neq 0$ aspoň pre jedno $t_0 \in \mathcal{I}$. Okrem toho funkcia

$$y = Yc, \quad c \in \mathbb{R}^n \tag{24}$$

je pre každú fundamentálnu maticu Y všeobecným riešením systému (20) na intervale $\mathcal{I}$. Poznamenajme, že fundamentálna matica systému (20) je určená jednoznačne až na konštantný regulárny násobok sprava. Konkrétne, ak Y je nejaká fundamentálna matica (20) na $\mathcal{I}$, potom maticová funkcia Z je tiež fundamentálnou maticou systému práve vtedy, keď na $\mathcal{I}$ platí

$$Z = YC, \quad \text{pre nejakú konštantnú štvorcovú maticu } C \text{ s } \det C \neq 0. \tag{25}$$

Obsah

Nehomogénny systém

Budeme skúmať všeobecný, nehomogénny systém (11), t.j.,

$$x' = A(t)\,x + b(t),$$

kde A je maticová funkcia rádu n a b je n-vektorová funkcia, obe definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$.

Veta 6 (Štruktúra riešení nehomogénneho systému)

Nech Y je úplné fundamentálne riešenie rovnice $Y' = A(t)\,Y$ a nech x_0 je nejaké riešenie nehomogénneho systému (11) *na $\mathcal{I}$. Potom vektorová funkcia x je úplné riešenie rovnice* (11) *práve vtedy, keď pre nejaké $c \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$x(t) = Y(t)\,c + x_0(t) \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{26}$$

Dôkaz Vety 6.

Dosadením do (11) sa ľahko overí, že pre každý konštantný n-vektor c je funkcia x v (26) riešením rovnice (11), pretože

$$x' = Y'c + x_0' = AYc + Ax_0 + b = A(Yc + x_0) + b = Ax + b \quad \text{na } \mathcal{I}.$$

Naopak, nech x je úplné riešenie systému (11). Potom funkcia $x - x_0$ spĺňa rovnicu (20), nakoľko

$$(x - x_0)' = x' - x_0' = Ax + b - Ax_0 - b = A(x - x_0) \quad \text{na } \mathcal{I}.$$

Podľa rovnosti (21) v Poznámke 4 preto existuje $c \in \mathbb{R}^n$ tak, že $x - x_0 = Yc$ na celom $\mathcal{I}$. Teda riešenie $x = Yc + x_0$ má tvar (26). ∎

Poznámka 5

Z Vety 6 vyplýva významné pozorovanie o všeobecnom riešení rovnice (11):

$$\begin{pmatrix}\text{všeobecné riešenie}\\ \text{nehom. systému}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{všeobecné riešenie}\\ \text{pridruž. hom. systému}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{partikulárne riešenie}\\ \text{nehom. systému}\end{pmatrix}.$$

Metóda variácie konštánt

Na nájdenie partikulárneho riešenia systému (11) sa využíva metóda variácie konštánt. Nech x je úplné riešenie začiatočnej úlohy (12) na intervale $\mathcal{I}$, t.j.,

$$x' = A(t)\, x + b(t), \quad x(t_0) = \eta,$$

pre pevné $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$. Pre danú fundamentálnu maticu Y pridruženého homogénneho systému (20) uvažujme vektorovú funkciu $c := Y^{-1}x$. Zrejme c je definovaná a diferencovateľná na celom $\mathcal{I}$ a platí

$$x(t) = Y(t)\, c(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Po dosadení tohto vyjadrenia riešenia x do systému (11) a úpravách dostaneme

$$c'(t) = Y^{-1}(t)\, b(t) \implies c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\, b(s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Hodnotu $c(t_0)$ určíme pomocou začiatočnej podmienky $x(t_0) = \eta$, konkrétne

$$c(t_0) = Y^{-1}(t_0)\, \eta.$$

Veta 7 (Metóda variácie konštánt)

Začiatočná úloha (12) *má jediné úplné riešenie tvaru*

$$x(t) = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,\eta + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,b(s)\,\mathrm{d}s, \quad \textit{pre každé } t \in \mathcal{I}, \qquad (27)$$

kde Y *je ľubovoľná fundamentálna matica homogénneho systému* (20).

Poznámka 6

Všimnime si, že vo vzorci (27) funkcia $x_H(t) := Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,\eta$ je partikulárne riešenie homogénneho systému (20) spĺňajúce $x_H(t_0) = \eta$, kým funkcia

$$x_P(t) := Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,b(s)\,\mathrm{d}s$$

je partikulárne riešenie rovnice (11) s podmienkou $x_P(t_0) = 0$, ako sa možno presvedčiť dosadením. Platí teda $x = x_H + x_P$ v súlade s Poznámkou 5.

Obsah

Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu

Diferenciálna rovnica

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)\, y' + p_0(t)\, y = f(t), \tag{28}$$

kde f a p_i, $i = 0, \ldots, n-1$, sú reálne skalárne funkcie definované a spojité na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, sa nazýva lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu. Ak $f(t) \equiv 0$, hovoríme o homogénnej LDR n-tého rádu, v opačnom prípade sa jedná o nehomogénnu rovnicu. Pre nehomogénnu rovnicu (28) sa rovnica

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)\, y' + p_0(t)\, y = 0, \tag{29}$$

označuje ako pridružená homogénna rovnica. Ľavá strana rovnice (28) sa často označuje výrazom Ly, kde L $: \mathrm{C}^n(\mathcal{I}) \to \mathrm{C}(\mathcal{I})$ je lineárny diferenciálny operátor n-tého rádu. (Úplným) riešením rovnice L$y = f$ rozumieme funkciu $\psi \in \mathrm{C}^n(\mathcal{I})$, ktorá identicky spĺňa rovnicu (28) na intervale $\mathcal{I}$. Začiatočná (Cauchyho) úloha (problém)

$$\mathrm{L}y = f, \quad y(t_0) = \eta_1, \quad y'(t_0) = \eta_2, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(t_0) = \eta_n, \tag{30}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$ je pevný bod a $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \mathbb{R}$ sú dané reálne konštanty.

Prevod na lineárny systém I

Veta 8 (Prevod na systém)

Nech ψ je (úplné) riešenie rovnice (28) *a položme*

$$\varphi_1 = \psi, \quad \varphi_2 = \psi', \quad \dots, \quad \varphi_n = \psi^{n-1}.$$

Potom n-vektorová funkcia $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ je (úplným) riešením systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= -p_0(t)\,x_1 - p_1(t)\,x_2 - \dots - p_{n-1}(t)\,x_n + f(t) \end{aligned} \tag{31}$$

na intervale $\mathcal{I}$. Naopak, pre každé (úplné) riešenie $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ systému (31) *na $\mathcal{I}$ je jeho prvá zložka φ_1 (úplným) riešením rovnice* (28).

Prevod na lineárny systém II

Veta 8 (Prevod na systém)

Nech $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$. Potom n-vektorová funkcia $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^T$ je (úplné) riešenie systému (31) spĺňajúce začiatočnú podmienku

$$\varphi(t_0) = \eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^T$$

práve vtedy, keď jeho prvá zložka φ_1 je (úplné) riešenie rovnice (28) spĺňajúce začiatočnú podmienku

$$\varphi_1(t_0) = \eta_1, \quad \varphi_1'(t_0) = \eta_2, \quad \ldots, \quad \varphi_1^{n-1}(t_0) = \eta_n.$$

Systém (31) sa dá prepísať do vektorového tvaru $x' = A(t)\,x + b$, kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & -p_2(t) & \cdots & -p_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Existencia a jednoznačnosť riešení

Veta 9 (Existencia a jednoznačnosť riešení)

Nech f a p_i, $i = 0, \dots, n-1$, sú reálne skalárne funkcie definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$ a nech $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{R}$ sú dané. Potom začiatočná úloha (30) *má práve jedno úplné riešenie na celom $\mathcal{I}$.*

Príklad 8

Uvažujme LDR 2. rádu na intervale $\mathcal{I} = (\mathrm{e}, \infty)$ a začiatočnú podmienku

$$y'' + \frac{1}{t(1-\ln t)}\, y' - \frac{1}{t^2(1-\ln t)}\, y = \frac{2-\ln t}{t(1-\ln t)}, \quad y(\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^2, \quad y'(\mathrm{e}^2) = 2.$$

Keďže koeficienty a pravá strana rovnice sú funkcie definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$, podľa Vety 9 má daná začiatočná úloha práve jedno úplné riešenie definované na celom intervale $\mathcal{I}$. Dá sa ukázať, že toto riešenie má tvar

$$y(t) = t\ln t - t, \quad t \in (\mathrm{e}, \infty).$$

Obsah

Systémy s konštantnými koeficientami

Z predchádzajúcich výsledkov vyplýva, že na úplné určenie množiny všetkých riešení (všeobecného riešenia) systému lineárnych diferenciálnych rovníc I. rádu je nutné a zároveň stačí poznať nejakú fundamentálnu maticu pridruženého homogénneho systému. Vo všeobecnom prípade je to veľmi náročný problém. Budeme sa bližšie zaoberať prípadom homogénneho systému s konštantnými koeficientami, t.j. systémom

$$y' = Ay, \tag{32}$$

kde A je konštantná reálna matica rádu n. Každé riešenie systému (32) je definované na intervale $(-\infty, \infty)$. Ukážeme, že pre systém (32) je možné pomerne efektívne určiť všetky jeho fundamentálne riešenia Y, t.j., maticové funkcie Y rádu n spĺňajúce $Y' = AY$ a $\det Y(t) \neq 0$ pre každé $t \in (-\infty, \infty)$.

Exponenciála matice

Nech M je komplexná matica rádu n. Matica definovaná

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k = I + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \cdots + \frac{1}{k!} M^k + \cdots \qquad (33)$$

sa nazýva exponenciála matice M. Nekonečný rad v (33) konverguje absolútne pre každú maticu M, a teda matica e^M je korektne definovaná pre každé M.

Poznámka 7 (Niektoré vlastnosti exponenciály matice)

Nech M, N sú komplexné matice rádu n. Potom platia nasledovné tvrdenia.

- $e^0 = I$.
- $e^M e^{-M} = I$, t.j., matica e^M je regulárna a $\left(e^M\right)^{-1} = e^{-M}$.
- Ak $MN = NM$, potom $e^M e^N = e^N e^M = e^{M+N}$.
- Ak N je regulárna, potom $e^{NMN^{-1}} = N e^M N^{-1}$.

Exponenciála matice ako fundamentálne riešenie

Veta 10

Nech A je reálna konštantná matica rádu n. Potom exponenciála e^{At} je fundamentálna matica homogénneho systému (32) *na* $(-\infty, \infty)$.

Dôkaz.

Maticová funkcia $Y(t) = \mathrm{e}^{At}$ je maticovým riešením systému (32), nakoľko

$$Y' = \left(\mathrm{e}^{At}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k\right)' = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} A^k t^{k-1}$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} \overset{(l=k-1)}{=} A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (At)^l = A\,\mathrm{e}^{At} = AY.$$

Okrem toho $Y(0) = I$, podľa Poznámky 7. Preto $Y(t)$ je regulárna na celom intervale $(-\infty, \infty)$, podľa Liouvilleovho-Jacobiho vzorca vo Vete 5. Teda $Y(t)$ je fundamentálna matica systému (32) na celom $(-\infty, \infty)$. ∎

Jordanov kanonický tvar matice

Veta 11 (Jordanova)

Nech M je komplexná matica rádu n. Potom existuje regulárna matica P rádu n tak, že

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} J_0 & O & \cdots & O \\ O & J_1 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_m \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Pritom matice $J_0 \in \mathbb{C}^{q\times q}$ a $J_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ pre $i = 1, \dots, m$ majú tvar

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_q \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{q+i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q+i} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

kde λ_j pre $j = 1, \dots, q+m$ sú (nie nutne rôzne) vlastné čísla matice M a platí $q + n_1 + \cdots + n_m = n$.

Matice J_i, $i = 0, \ldots, m$, sa nazývajú Jordanove bloky (klietky) matice M a stĺpce matice P sa nazývajú zovšeobecnené vlastné vektory matice M. Blokovo diagonálna matica

$$Q = \begin{pmatrix} J_0 & O & \cdots & O \\ O & J_1 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_m \end{pmatrix} \tag{36}$$

v Jordanovom rozklade (34) je určená jednoznačne až na poradie Jordanovych blokov. Matica P nie je určená jednoznačne. Medzi stĺpcami matice P a Jordanovymi blokmi matice Q platí nasledovná korešpondencia.

Stĺpce $h_1, \ldots, h_q$ sú vlastné vektory matice M odpovedajúce vlastným číslam $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$.

Stĺpce $h_{q+n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, \ldots, h_{q+n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i}$ sú zovšeobecnené vlastné vektory matice M odpovedajúce vlastnému číslu λ_{q+n_i} v bloku J_i pre $i = 1, \ldots, m$.

Výpočet fundamentálnej matice

Stanovíme teraz fundamentálnu maticu systému (32) ako vhodný pravostranný regulárny násobok exponenciály e^{At}. Nech $t \in (-\infty, \infty)$. Ak P a Q sú matice z Vety 11 odpovedajúce Jordanovmu rozkladu matice A, t.j., $A = PQP^{-1}$, potom podľa Poznámky 7 platí

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{P(Qt)P^{-1}} = P\mathrm{e}^{Qt}P^{-1}, \quad \text{teda} \quad \mathrm{e}^{At}P = P\mathrm{e}^{Qt}. \tag{37}$$

Z tvaru matice Q a z definície exponenciály matice vyplýva

$$\mathrm{e}^{Qt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{J_0 t} & O & \cdots & O \\ O & \mathrm{e}^{J_1 t} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & \mathrm{e}^{J_m t} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Pre exponenciálu Jordanovho bloku $J_0 t$ platí

$$\mathrm{e}^{J_0 t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_q t} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Výpočet fundamentálnej matice

Blok $J_i t$ pre $i = 1, \ldots, m$ má tvar $J_i t = (\lambda_{q+i} t) I_i + M_i t$, kde I_i je identická matica rádu n_i a

$$M_i t = \begin{pmatrix} 0 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Matice $(\lambda_{q+i} t) I_i$ a $M_i t$ komutujú, preto podľa Poznámky 7 platí

$$e^{J_i t} = e^{(\lambda_{q+i} t) I_i + M_i t} = e^{\lambda_{q+i} t} e^{M_i t}. \tag{41}$$

Postupným počítaním mocnín $(M_i t)^k$ pre $k = 0, 1, \ldots$ zistíme, že $(M_i t)^k = 0$ pre každé $k \geq n_i$, a teda

$$e^{M_i t} = \sum_{k=0}^{n_i - 1} \frac{1}{k!} (M_i t)^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i - 2}}{(n_i - 2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Výpočet fundamentálnej matice

Kombináciu formúl (41) a (42) dostaneme tvar exponeciály bloku $J_i t$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_{q+i} t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (43)$$

a tým aj, využitím vyjadrení v (38) a (39), exponenciálu matice Qt. Podľa Poznámky 4 je matica $e^{At}P$ fundamentálnou maticou systému (32). Označme

$$P = [h_1, \ldots, h_n] \quad \text{a} \quad e^{At}P = [y_1(t), \ldots, y_n(t)].$$

Rovnosť (37) a predchádzajúca analýza implikujú nasledujúce tvrdenie.

Fundamentálny systém riešení

Veta 12 (Fundamentálny systém riešení)

Vektorové funkcie

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 t} h_1 \\
&\vdots \\
y_q(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_q t} h_q \\
y_{q+1}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+1} t} h_{q+1} \\
y_{q+2}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+1} t} \left[t h_{q+1} + h_{q+2} \right] \\
&\vdots \\
y_{q+n_1}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+1} t} \left[\frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!} h_{q+1} + \frac{t^{n_1-2}}{(n_1-2)!} h_{q+2} + \cdots + h_{q+n_1} \right] \\
&\vdots \\
y_n(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+m} t} \left[\frac{t^{n_m-1}}{(n_m-1)!} h_{n-n_m+1} + \frac{t^{n_m-2}}{(n_m-2)!} h_{n-n_m+2} + \cdots + h_n \right],
\end{aligned} \tag{44}$$

tvoria fundamentálny systém riešení rovnice (32) *na intervale* $(-\infty, \infty)$.

Môžeme preto konštatovať, že zložky vektorových riešení fundamentálneho systému vo Vete 12 majú tvar kvázipolynómov, t.j.,

$$p_k(t)\, \mathrm{e}^{\lambda_k t},$$

kde λ_k je vlastné číslo matice A a $p_k(t)$ sú polynómy v premennej t stupňa menšieho ako je algebraická násobnosť čísla λ_k. Keďže matica A je reálna, s každým nereálnym vlastným číslom $\alpha + \mathrm{i}\beta$ má aj komplexne združené vlastné číslo $\alpha - \mathrm{i}\beta$. Vo fundamentálnom systéme (44) sa teda s každým nereálnym riešením y nachádza aj komplexne združené riešenie $\bar{y}$. Nakoľko platí

$$\mathrm{Re}\, y = \frac{1}{2}\,(y + \bar{y}), \quad \text{a} \quad \mathrm{Im}\, y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,(y - \bar{y}),$$

reálne vektorové funkcie $\mathrm{Re}\, y$ a $\mathrm{Im}\, y$ sú lineárne nezávislými riešeniami rovnice (32). Preto každú nereálnu dvojicu riešení y a $\bar{y}$ môžeme nahradiť reálnou dvojicou riešení $\mathrm{Re}\, y$ a $\mathrm{Im}\, y$. Tým získame reálny fundamentálny systém vektorových riešení, pričom zložky jednotlivých jeho riešení budú mať tvar

$$[p_k(t)\, \cos\left((\mathrm{Im}\,\lambda_k)\, t\right) + q_k(t)\, \sin\left((\mathrm{Im}\,\lambda_k)\, t\right)]\, \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}\,\lambda_k)\, t},$$

kde $p_k(t)$ a $q_k(t)$ sú už reálne polynómy v premennej t stupňa menšieho než je algebraická násobnosť čísla λ_k.

Príklad 9

Určime nejakú fundamentálnu maticu systému

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Podľa Vety 10 stačí nájsť exponenciálu matice At. Matica A systému je už v Jordanovom blokovom tvare

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

a má jednoduché vlastné číslo 2 a štvornásobné vlastné číslo -1.

Príklad 9

Exponenciála e^{At} má preto tvar

$$Y(t) = \mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} & \frac{t^2}{2!}\,\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Poznamenajme, že fundamentálna matica Y rovnice (32) je normovaná v bode $t_0 = 0$, t.j., platí $Y(0) = I$. Fundamentálna matica Z normovaná napr. v bode $t_0 = 3$, t.j., $Z(3) = I$, má tvar

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2(t-3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-(t-3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-(t-3)} & (t-3)\,\mathrm{e}^{-(t-3)} & \frac{(t-3)^2}{2!}\,\mathrm{e}^{-(t-3)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-(t-3)} & (t-3)\,\mathrm{e}^{-(t-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-(t-3)} \end{pmatrix}.$$

Príklad 10

Nájdime všeobecné riešenie systému

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Zistíme vlastné čísla matice A systému. Jej charakteristický polynóm má tvar

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2.$$

Matica A má teda jednoduché vlastné číslo 2 a dvojnásobné vlastné číslo 1. Vlastnému číslu 2 odpovedá jedno lineárne nezávislé riešenie tvaru

$$x(t) = \left(a\,\mathrm{e}^{2t},\ b\,\mathrm{e}^{2t},\ c\,\mathrm{e}^{2t}\right)^T,$$

kde a, b, c sú konštanty. Dosadením tohto riešenia do systému v zadaní dostaneme po úpravách pre a, b, c sústavu troch lineárnych rovníc

$$2a = a - b + c, \quad 2b = a + b - c, \quad 2c = -b + 2c.$$

Táto sústava má jedno lineárne nezávislé riešenie $a = c = 1$ a $b = 0$.

Príklad 10

Vlastnému číslu 1 odpovedajú dve lineárne nezávislé riešenia tvaru

$$x(t) = \begin{pmatrix} (at+b)\,\mathrm{e}^t \\ (ct+d)\,\mathrm{e}^t \\ (ft+g)\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, f, g sú konštanty. Dosadením tohto riešenia do systému v zadaní dostaneme po úpravách

$$\begin{aligned} a + (at+b) &= (at+b) - (ct+d) + (ft+g) \\ c + (ct+d) &= (at+b) + (ct+d) - (ft+g) \\ f + (ft+g) &= -(ct+d) + 2(ft+g). \end{aligned}$$

Ak porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách premennej t na oboch stranách týchto rovností, získame 4 nezávislé rovnice pre a, b, c, d, f, g, a to

$$f - c = 0, \quad a - f = 0, \quad a = g - d, \quad c = b - g.$$

Táto sústava má dve lineárne nezávislé riešenia

$$a = c = f = 0, \quad b = d = g = 1 \quad \text{a} \quad a = b = c = f = 1, \quad d = -1, \quad g = 0.$$

Príklad 10

Zostrojili sme teda tri lineárne nezávislé vektorové riešenia rovnice v zadaní, a teda jej fundamentálny systém riešení je

$$\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (t+1)\,e^{t} \\ (t-1)\,e^{t} \\ t\,e^{t} \end{pmatrix}.$$

Všeobecné riešenie systému v zadaní má potom pre každé $t \in (-\infty, \infty)$ tvar

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (t+1)\,e^{t} \\ (t-1)\,e^{t} \\ t\,e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_3 (t+1)\,e^{t} \\ c_2 e^{t} + c_3 (t-1)\,e^{t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_3 t\,e^{t} \end{pmatrix}$$

pre c_1, c_2, c_3 ľubovoľné reálne konštanty. Pre úplnosť poznamenajme, že matica

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{t} & (t+1)\,e^{t} \\ 0 & e^{t} & (t-1)\,e^{t} \\ e^{2t} & e^{t} & t\,e^{t} \end{pmatrix}$$

je fundamentálnou maticou rovnice v zadaní.

Príklad 11

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Matica A systému má jednoduché reálne vlastné číslo 1 a dvojicu jednoduchých nereálnych vlastných čísiel $1 \pm 2\mathrm{i}$. Fundamentálny systém rovnice v zadaní je preto tvorený tromi lineárne nezávislými vektorovými riešeniami tvaru

$$\begin{pmatrix} a_1\,\mathrm{e}^{t} \\ a_2\,\mathrm{e}^{t} \\ a_3\,\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \\ b_2\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \\ b_3\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1\,\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \\ c_2\,\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \\ c_3\,\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \end{pmatrix},$$

kde a_i, b_i, c_i pre $i = 1, 2, 3$ sú vo všeobecnosti komplexné konštanty. Podobným postupom ako v predchádzajúcom príklade zistíme riešenia

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{t} \\ -\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \\ \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \\ 3\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \\ \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \\ 3\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 11

Získaný fundamentálny systém je nereálny. Nahradením posledných dvoch nereálnych vektorových funkcií ich reálnymi a imaginárnymi časťami dostaneme reálny fundamentálny systém riešení

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^t \sin 2t \\ \mathrm{e}^t \cos 2t \\ 3\mathrm{e}^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \cos 2t \\ \mathrm{e}^t \sin 2t \\ 3\mathrm{e}^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Pri výpočte sme využili Eulerovu identitu

$$\mathrm{e}^{(1\pm 2\mathrm{i})\,t} = \mathrm{e}^t(\cos 2t \pm \mathrm{i} \sin 2t).$$

Príslušná fundamentálna matica $Y(t)$ systému v zadaní má potom pre každé $t \in (-\infty, \infty)$ tvar

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2\mathrm{e}^t \cos 2t & 2\mathrm{e}^t \cos 2t \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \cos 2t & \mathrm{e}^t \sin 2t \\ -\mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^t \cos 2t & 3\mathrm{e}^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$