

Komplexná analýza

Peter Šepitka

podzim 2015

Obsah

- 1 Komplexné čísla
- 2 Postupnosti, rady a funkcie

Obsah

- 1 Komplexné čísla
- 2 Postupnosti, rady a funkcie

Obor komplexných čísiel

Pod pojmom **komplexné číslo** a rozumieme usporiadanú dvojicu $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Prvá zložka α tejto dvojice sa nazýva **reálna časť** komplexného čísla a , druhá zložka β sa nazýva **imaginárna časť** komplexného čísla a , označujeme $\alpha = \operatorname{Re} a$ a $\beta = \operatorname{Im} a$. Definujeme **sčítanie** a **násobenie** komplexných čísiel

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) := (\alpha + \gamma, \beta + \delta),$$

$$(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) := (\alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma).$$

Sčítanie i násobenie komplexných čísiel sú **asociatívne** a **komutatívne** binárne operácie a pre každú trojicu a, b, c komplexných čísiel platí **distributívny zákon**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Pre úplnosť definujeme **násobenie komplexného čísla reálnym číslom**

$$r(\alpha, \beta) := (r\alpha, r\beta), \quad r \in \mathbb{R}.$$

- **Nula** – $(0, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie, t.j.,

$$(\alpha, \beta) + (0, 0) = (0, 0) + (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta).$$

- **Jednotka** – $(1, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na násobenie, t.j.,

$$(\alpha, \beta) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta).$$

- **Opačné číslo** ku komplexnému číslu $a = (\alpha, \beta)$

$$-a := (-\alpha, -\beta)$$

Komplexné číslo $-a$ je jediné riešenie rovnice

$$a + z = (0, 0).$$

- **Inverzné číslo** k nenulovému komplexnému číslu $a = (\alpha, \beta)$

$$a^{-1} := \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right).$$

Komplexné číslo a^{-1} je jediné riešenie rovnice

$$a \cdot z = (1, 0).$$

- **Odčítanie** komplexných čísiel a, b definujeme $a - b := a + (-b)$.
- **Delenie** komplexných čísiel $a, b, b \neq (0, 0)$, definujeme $a/b := a \cdot b^{-1}$.

Množina všetkých komplexných čísiel sa označuje \mathbb{C} . Algebraická štruktúra $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je teleso, ktoré sa nedá usporiadať (na rozdiel od $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

Algebraický tvar komplexného čísla

Podmnožina komplexných čísiel

$$\mathcal{R} := \{a \in \mathbb{C}, a = (\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

je podtelesom telesa \mathbb{C} izomorfným s telesom \mathbb{R} všetkých reálnych čísiel. Preto je možné množiny \mathcal{R} a \mathbb{R} , ako algebraické štruktúry, stotožniť. To znamená, že v množine \mathbb{C} budeme klásť $\alpha = (\alpha, 0)$ pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $0 = (0, 0)$ a $1 = (1, 0)$. Ďalej, komplexné číslo $(0, 1)$ sa označuje symbolom **i**, t.j., $i = (0, 1)$, a nazýva sa **imaginárna jednotka**. Platí $i^2 = (-1, 0) = -1$. Tieto označenia potom umožňujú vyjadriť komplexné číslo $a = (\alpha, \beta)$ v tzv. **algebraickom tvare**

$$a = (\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = \alpha + i\beta. \quad (1)$$

Komplexné číslo $a = \alpha + i\beta$ s $\beta = 0$ (teda s $\text{Im } a = 0$) sa označuje ako **reálne** (komplexné) číslo, kým komplexné číslo $a = \alpha + i\beta$ s $\beta \neq 0$ (teda s $\text{Im } a \neq 0$) sa nazýva **imaginárne** (komplexné) číslo. Imaginárne číslo s nulovou reálnou časťou sa nazýva **rýdzo imaginárne** (komplexné) číslo. **Komplexne združené číslo** \bar{a} k číslu $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ je definované ako $\bar{a} = \alpha - i\beta$.

Absolútna hodnota (veľkosť) $|a|$ komplexného čísla $a = \alpha + i\beta$ sa definuje

$$|a| := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (2)$$

Reálne číslo $|a|$ vyjadruje geometrickú vzdialenosť bodu $[\alpha, \beta]$ od bodu $[0, 0]$ v reálnej rovine. Všeobecne, pre $a, b \in \mathbb{C}$ reálne číslo $|a - b|$ vyjadruje vzájomnú vzdialenosť bodov $[\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a]$ a $[\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b]$ v reálnej rovine.

Poznámka 1 (Základné vlastnosti)

Nech $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Potom platí:

- $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{a_1 \pm a_2} = \bar{a}_1 \pm \bar{a}_2$, $\overline{a_1 a_2} = \bar{a}_1 \bar{a}_2$, $\overline{a_1/a_2} = \bar{a}_1/\bar{a}_2$, ak $a_2 \neq 0$.
- $a\bar{a} = |a|^2$, $|a_1 a_2| = |a_1||a_2|$, $|a_1/a_2| = |a_1|/|a_2|$, ak $a_2 \neq 0$.
- trojuholníkové nerovnosti $||a_1| - |a_2|| \leq |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$.
- $|\operatorname{Re} a| \leq |a|$, $|\operatorname{Im} a| \leq |a|$.

•

$$\operatorname{Re} a = \frac{a + \bar{a}}{2}, \quad \operatorname{Im} a = \frac{a - \bar{a}}{2i}.$$

- $\operatorname{Re}(a_1 \pm a_2) = \operatorname{Re} a_1 \pm \operatorname{Re} a_2$, $\operatorname{Im}(a_1 \pm a_2) = \operatorname{Im} a_1 \pm \operatorname{Im} a_2$.

Komplexná (Gaussova) rovina

Prirodzeným modelom množiny \mathbb{C} komplexných čísel je (euklidovská) rovina – **komplexná (Gaussova) rovina**. Každému komplexnému číslu $z = x + iy$ je priradený bod v rovine so súradnicami $[x, y]$. Naopak, každému bodu $[x, y]$ roviny odpovedá práve jedno komplexné číslo $z = x + iy$. Ďalej budeme preto pre jednoduchosť stotožňovať body roviny s komplexnými číslami. Vzdialenosť (metrika) sa v množine \mathbb{C} definuje pomocou absolútnej hodnoty komplexného čísla zavedenej v (2), t.j., vzdialenosť dvoch komplexných čísel z_1 a z_2 je definovaná $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$.

Ako je to s pojmom **“komplexné” nekonečno**? Pre množinu \mathbb{C} komplexných čísel sa definuje iba jedno “nekonečno”. Konkrétne, k množine \mathbb{C} sa formálne pridá jeden prvok, ktorý sa označuje symbolom ∞ , spĺňajúci vlastnosti

$$\begin{aligned} \infty &= -\infty = |\infty|, & \infty \cdot \infty &= \infty, \\ z + \infty &= \infty, & z/\infty &= 0, & \infty/z &= \infty & \text{pre } z \in \mathbb{C}, \\ z \cdot \infty &= \infty, & z/0 &= \infty, & & \text{pre } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Nedefinujú sa výrazy $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ . Množina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sa spolu s danými algebraickými operáciami označuje $\tilde{\mathbb{C}}$ a nazýva sa **rozšírená (uzavretá) komplexná rovina** alebo tiež **rozšírená (uzavretá) Gaussova rovina**.

Goniometrický (polárny) tvar komplexného čísla

S modelom komplexnej roviny úzko súvisí tzv. **goniometrický (polárny) tvar komplexných čísiel**. Každé nenulové komplexné číslo z je možné vyjadriť v tvare

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (3)$$

kde φ je **argument** komplexného čísla z definovaný rovnicami

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \quad (4)$$

Argument φ nie je určený jednoznačne (ak φ je argument z , potom i $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je argument z). Množina všetkých argumentov daného komplexného čísla sa označuje **Arg z** (je to tzv. **mnohoznačná funkcia** premennej z). Symbol $\arg z$ bude označovať **základný (hlavný) argument** komplexného čísla z , t.j., argument spĺňajúci $-\pi \leq \arg z < \pi$. Základný argument $\arg z$ je pre dané z určený jednoznačne. Platí

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \quad (5)$$

Posledná rovnosť sa často zapisuje i v tvare $\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}$.

Zavedenie goniometrického tvaru v (3) umožňuje efektívne násobiť a deliť komplexné čísla. Konkrétne, ak

$$z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

sú dve komplexné čísla a φ_1 a φ_2 sú ich ľubovoľné argumenty, potom platí

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| |z_2| [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &\quad + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Z rovnosti (6) potom vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \quad \text{a} \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \quad (7)$$

ako aj tzv. **Moivreov vzorec** na výpočet n -tej mocniny komplexného čísla z

$$z^n = |z|^n [\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Okrem toho z relácií (7) vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z \quad \text{a} \quad \arg(z^n) \equiv n \arg z \pmod{2\pi}. \quad (9)$$

Podobne, pre podiel z_1/z_2 , $z_2 \neq 0$, platí

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} \frac{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2}{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Potom máme

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}. \quad (11)$$

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ je **n -tá odmocnina** zo z definovaná ako

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (12)$$

kde $k = 0, \dots, n-1$. Pre pevné n sa teda jedná o mnohoznačnú funkciu (premennej z), pričom pre každé $z \in \mathbb{C}$ existuje práve n jeho n -tých odmocnín.

Výraz $\cos \varphi + i \sin \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, sa obvykle označuje symbolom $e^{i\varphi}$, t.j.,

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (13)$$

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ potom platí

$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \text{Arg } z. \quad (14)$$

Zápis (14) sa nazýva **exponenciálny tvar** komplexného čísla z . Pre každé φ , φ_1 , $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$|e^{i\varphi}| = 1, \quad \arg e^{i\varphi} \equiv \varphi \pmod{2\pi}, \quad \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = 1/e^{i\varphi}, \quad (15)$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad (16)$$

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}, \quad e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} / e^{i\varphi_2}, \quad (17)$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^m = e^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Neskôr ukážeme, že výraz $e^{i\varphi}$ zavedený v (13) je rozšírením exponenciálnej funkcie e^x do oboru komplexných čísel.

Príklad 1

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$1 + i.$$

Pre komplexné číslo $z = 1 + i$ platí

$$\operatorname{Re} z = 1, \quad \operatorname{Im} z = 1, \quad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z potom spĺňa rovnosti

$$\cos \varphi = \operatorname{Re} z / |z| = 1/\sqrt{2}, \quad \sin \varphi = \operatorname{Im} z / |z| = 1/\sqrt{2}.$$

Riešenie tejto sústavy je napr. $\varphi = 9\pi/4$. Potom platí

$$z = \sqrt{2} [\cos (9\pi/4) + i \sin (9\pi/4)].$$

Základný argument čísla z je $\arg z = \pi/4$ a podobne platí

$$z = \sqrt{2} [\cos (\pi/4) + i \sin (\pi/4)].$$

Príklad 2

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$-2\sqrt{3} - 2i.$$

Pre komplexné číslo $z = -2\sqrt{3} - 2i$ platí

$$\operatorname{Re} z = -2\sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z = -2, \quad |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z spĺňa rovnosť

$$\cos \varphi = \operatorname{Re} z / |z| = -\sqrt{3}/2, \quad \sin \varphi = \operatorname{Im} z / |z| = -1/2.$$

Základný argument čísla z je $\arg z = -5\pi/6$ a platí

$$z = 4 [\cos(-5\pi/6) + i \sin(-5\pi/6)].$$

Príklad 3

Vypočítajte

$$(1 + i\sqrt{3})^{15}.$$

Použijeme Moivreov vzorec (8). Komplexné číslo $z = 1 + i\sqrt{3}$ prepíšeme do goniometrického tvaru. Platí $|z| = 2$, $\arg z = \pi/3$, a teda

$$z = 2 [\cos (\pi/3) + i \sin (\pi/3)].$$

Potom podľa (8) máme

$$z^{15} = 2^{15} [\cos (15\pi/3) + i \sin (15\pi/3)] = 2^{15} [\cos (5\pi) + i \sin (5\pi)] = -2^{15}.$$

Poznamenajme, že rovnaký výsledok by sme získali klasickým roznásobením podľa binomickej vety.

Príklad 4

Vypočítajme v \mathbb{C}

$$\sqrt[3]{-8}.$$

Podľa (12) existujú práve 3 komplexné tretie odmocniny z čísla $z = -8$.
Goniometrický tvar čísla z je

$$z = 8 [\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)].$$

Podľa (12) platí

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} \left[\cos \left(\frac{-\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi + 2k\pi}{3} \right) \right],$$

pričom $k = 0, 1, 2$. Postupne dostávame

$$k = 0 \rightarrow \sqrt[3]{8} \left[\cos \left(\frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{3} \right) \right] = 1 - i\sqrt{3},$$

$$k = 1 \rightarrow \sqrt[3]{8} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] = 1 + i\sqrt{3},$$

$$k = 2 \rightarrow \sqrt[3]{8} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2.$$

Obsah

- 1 Komplexné čísla
- 2 Postupnosti, rady a funkcie

Postupnosti v \mathbb{C}

Nech $r \in \mathbb{R}^+$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. **Otvoreným kruhom** $K(z_0, r)$ so stredom v bode z_0 a s polomerom r rozumieme množinu $K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$. Množina $K(z_0, r)$ sa často označuje aj ako **r -okolie** bodu z_0 . Ak $z_0 = \infty$, definujeme $K(\infty, r) := \{z \in \tilde{\mathbb{C}}, |z| > 1/r\}$. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísiel. Komplexné číslo $a_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ sa nazýva **limitou** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé ε -okolie bodu a_0 existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in K(a_0, \varepsilon)$ pre každý index $n \geq n_\varepsilon$. Potom píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ alebo aj $a_n \rightarrow a_0$.

Veta 1

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v \mathbb{C} a $a_0 \in \mathbb{C}$. Potom $a_n \rightarrow a_0$ práve vtedy, keď

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_0| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a_0 \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a_0. \quad (19)$$

V tomto prípade platí i $\overline{a_n} \rightarrow \overline{a_0}$. Podobne, $a_n \rightarrow \infty$ práve vtedy, keď

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty, \quad \text{resp.}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1/|a_n| = 0. \quad (20)$$

Číselné rady v \mathbb{C}

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v \mathbb{C} . Postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ (tzv. **postupnosť čiastočných súčtov**) definovaná ako $s_k := \sum_{n=1}^k a_n$ sa nazýva **nekonečný rad** s členmi a_n a označuje sa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, resp. $\sum a_n$. Rad $\sum a_n$ **konverguje (resp., je konvergentný)**, ak existuje **konečná** limita postupnosti $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$. Túto limitu potom označujeme ako **súčet** s radu a píšeme $s = \sum a_n$. V opačnom prípade rad $\sum a_n$ **diverguje (resp., je divergentný)**.

Veta 2

Nech $\sum a_n, \sum b_n$ sú konvergentné rady a $a, b \in \mathbb{C}$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (nutná podmienka konverencie radu).
- Rad $\sum \overline{a_n}$ konverguje so súčtom $\sum \overline{a_n} = \overline{\sum a_n}$.
- Rad $\sum (aa_n + bb_n)$ konverguje a $\sum (aa_n + bb_n) = a \sum a_n + b \sum b_n$.

Veta 3

Komplexný rad $\sum a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje každý z reálnych radov $\sum \operatorname{Re} a_n$ a $\sum \operatorname{Im} a_n$, pričom platí $\sum a_n = \sum \operatorname{Re} a_n + i \sum \operatorname{Im} a_n$.

Komplexný rad $\sum a_n$ sa nazýva **absolútne konvergentný**, ak rad $\sum |a_n|$ je konvergentný. Každý absolútne konvergentný rad je i konvergentný a platí

$$\left| \sum a_n \right| \leq \sum |a_n|.$$

Ak $\sum a_n$ konverguje, ale rad $\sum |a_n|$ diverguje, potom hovoríme, že rad $\sum a_n$ konverguje **neabsolútne (relatívne)**. Platia nasledujúce výsledky.

Veta 4

Komplexný rad $\sum a_n$ konverguje absolútne práve vtedy, keď každý z reálnych radov $\sum \operatorname{Re} a_n$ a $\sum \operatorname{Im} a_n$ konverguje absolútne.

Veta 5 (Riemannova veta o prerovnaní absolútne konvergentného radu)

Ak komplexný rad $\sum a_n$ konverguje absolútne, potom každé prerovnanie tohto radu konverguje absolútne s rovnakým súčtom, t.j., platí

$$\sum a_{\tau(n)} = \sum a_n$$

pre každú permutáciu τ množiny \mathbb{N} (t.j., pre každú bijekciu $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$).

Pri vyšetrowaní (absolútnej) konvergencie komplexných radov môžeme aplikovať mnohé kritériá využívané v reálnej analýze.

- **Porovnávacie kritérium** – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_n| \leq b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $\sum b_n$ je konvergentný reálny rad, potom rad $\sum a_n$ konverguje absolútne.
- **D'Alembertovo podielové kritérium** – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum a_n$ konverguje absolútne. Ak $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom rad $\sum a_n$ diverguje. Obzvlášť, ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = q \in \mathbb{R}^*$, potom pre $q < 1$ ($q > 1$) rad $\sum a_n$ konverguje absolútne (diverguje).
- **Cauchyho odmocninové kritérium** – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum a_n$ konverguje absolútne. Ak $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom rad $\sum a_n$ diverguje. Obzvlášť, ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^*$, potom pre $q < 1$ ($q > 1$) rad $\sum a_n$ konverguje absolútne (diverguje).
- **Cauchyho integrálne kritérium** – ak rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_n| = f(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná, nerastúca a spojitá funkcia, potom rad $\sum a_n$ konverguje absolútne práve vtedy, keď nevlastný integrál $\int_1^\infty f(x) dx$ konverguje.

Príklad 5

Stanovme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n}{n!}.$$

Nájdeme reálnu a imaginárnu časť príslušnej postupnosti. Podľa Príkladu 1 platí

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^n}{n!} &= \frac{(\sqrt{2} [\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)])^n}{n!} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^n \cos(\pi n/4)}{n!} + i \frac{(\sqrt{2})^n \sin(\pi n/4)}{n!}. \end{aligned}$$

Teda máme

$$\operatorname{Re} \left(\frac{(1+i)^n}{n!} \right) = \frac{(\sqrt{2})^n \cos(\pi n/4)}{n!}, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{(1+i)^n}{n!} \right) = \frac{(\sqrt{2})^n \sin(\pi n/4)}{n!}.$$

Keďže platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\frac{(1+i)^n}{n!} \right) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left(\frac{(1+i)^n}{n!} \right),$$

podľa Vety 1 limita v zadaní príkladu existuje a je rovná $0 + i0 = 0$.

Príklad 6

Dokážme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n2^n} = 0.$$

Uvedený výsledok vyplýva z Vety 1, pretože platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{i^n}{n2^n} - 0 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|i|^n}{n2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n2^n} = 0.$$

Príklad 7

Nájdime limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{in}.$$

Táto limita existuje a je nevlastná, pretože platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| n e^{in} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left| e^{in} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Pri výpočte sme využili prvú rovnosť v (15), t.j., $|e^{in}| = 1$. Podľa Vety 1 potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{in} = \infty.$$

Príklad 8

Nájdime súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + i(-1)^{n-1}n}{n^2}.$$

V danom rade oddelíme jeho reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + i(-1)^{n-1}n}{n^2} \right) = \frac{1}{n^2}, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1 + i(-1)^{n-1}n}{n^2} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Keďže z reálnej analýzy máme

$$\sum 1/n^2 = \pi^2/6, \quad \sum (-1)^{n-1}/n = \ln 2,$$

podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu a platí

$$\sum \frac{1 + i(-1)^{n-1}n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + i \ln 2.$$

Príklad 9

Vyšetrite konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}.$$

Oddelením reálnej a imaginárnej časti daného radu dostaneme

$$\operatorname{Re} \left(\frac{i^n}{n} \right) = \begin{cases} (-1)^k / (2k), & n = 2k, \\ 0, & n = 2k - 1, \end{cases}$$
$$\operatorname{Im} \left(\frac{i^n}{n} \right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1} / (2k - 1), & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Obidva reálne rady $\sum \operatorname{Re}$ a $\sum \operatorname{Im}$ konvergujú (podľa Leibnizovho kritéria), a preto podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu.

Príklad 10

Vyšetríme konvergenciu radov

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{3^n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} a^n, \quad a \in \mathbb{C}.$$

a) Rad konverguje absolútne podľa D'Alembertovho kritéria, nakoľko

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)(1+i)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n(1+i)^n}{3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(1+i)}{3n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt{2}}{3n} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

b) Aplikovaním Cauchyho odmocninového kritéria dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a| = |a|.$$

Pre $|a| < 1$ daný rad konverguje absolútne, pre $|a| > 1$ rad diverguje. V prípade $|a| = 1$ rad diverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie vo Vete 2 ($\lim_{n \rightarrow \infty} a^n \neq 0$, resp. neexistuje).

Funkcie v \mathbb{C}

Nech \mathcal{D} je podmnožina v $\tilde{\mathbb{C}}$. Pod pojmom (komplexná) **funkcia** (komplexnej premennej) f budeme rozumieť priradenie, ktoré každému číslu $z \in \mathcal{D}$ priradí jednu alebo viac hodnôt $w \in \tilde{\mathbb{C}}$. Množina \mathcal{D} sa nazýva **definičný obor** funkcie f a označuje sa $\mathcal{D}(f)$. Množina

$$\mathcal{H}(f) := \{w \in \tilde{\mathbb{C}}, w = f(z), z \in \mathcal{D}(f)\}$$

sa nazýva **obor hodnôt** funkcie f . Ak je každému $z \in \mathcal{D}(f)$ priradená **práve jedna** hodnota $w = f(z) \in \mathcal{H}(f)$, potom hovoríme o **jednoznačnej funkcii** f . V opačnom prípade funkciu f označujeme ako **mnohoznačnú**. Vhodným zúžením oboru hodnôt $\mathcal{H}(f)$ mnohoznačnej funkcie f dostaneme jednoznačnú funkciu – tzv. **jednoznačnú vetvu** komplexnej funkcie f . Vo všeobecnosti teda komplexná funkcia komplexnej premennej **nie je zobrazenie**, pričom symbol $f(z)$ znamená podmnožinu v $\mathcal{H}(f)$. **Inverznou** funkciou k funkcii $f : w = f(z), z \in \mathcal{D}(f)$, rozumíme funkciu $f^{-1} : z = f^{-1}(w)$, ktorá každému $w \in \mathcal{H}(f)$ priradí práve tie $z \in \mathcal{D}(f)$, pre ktoré $w = f(z)$. Zrejme $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$. Okrem toho, $f(f^{-1}(w)) = w$, pre každé $w \in \mathcal{H}(f)$, avšak **neplatí** všeobecne $f^{-1}(f(z)) = z$, pre $z \in \mathcal{D}(f)$. Inverzná funkcia f^{-1} môže byť jednoznačná i mnohoznačná.

Nech f je funkcia. Ak $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$, jedná sa o funkciu **reálnej premennej**, inak hovoríme o funkcii **komplexnej premennej**. V prípade $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{R}$ máme **reálnu** funkciu, inak (t.j., pre $\mathcal{H}(f) \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$) máme **komplexnú** funkciu. Ak platí dokonca $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{C}$, potom hovoríme o **konečnej** (komplexnej) funkcii.

Nech f je konečná funkcia komplexnej premennej. Potom existujú jediné reálne funkcie $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre každé $z = x + iy \in \mathcal{D}(f) \cap \mathbb{C}$ platí

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y). \quad (21)$$

Funkcie u a v sa nazývajú **reálna** a **imaginárna** časť funkcie f , t.j.,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z). \quad (22)$$

Funkcia \bar{f} definovaná $\bar{f}(z) := \overline{f(z)}$, $z \in \mathcal{D}(f)$, sa nazýva **funkcia komplexne združená** s f . Zrejme potom platí $\bar{f}(z) = u(x, y) - i v(x, y)$ a

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{f(z) - \bar{f}(z)}{2i}, \quad z \in \mathcal{D}(f). \quad (23)$$

Limitu a spojitosť komplexnej funkcie f komplexnej premennej definujeme podobným spôsobom ako v reálnej analýze. Nech $M \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$ a z_0 je hromadný bod množiny M . Číslo $w_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ nazývame **limitou funkcie f v bode z_0 vzhľadom na množinu M** a píšeme

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0,$$

ak pre každé okolie $\mathcal{O}(w_0)$ bodu w_0 existuje rýdze okolie $\mathcal{O}^*(z_0)$ bodu z_0 také, že pre každé $z \in \mathcal{O}^*(z_0) \cap M$ platí $f(z) \in \mathcal{O}(w_0)$. V prípade $M = \mathcal{D}(f)$ dostávame limitu funkcie f v tradičnom slova zmysle, t.j.,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{D}(f)}} f(z) = w_0.$$

Okrem toho platia relácie

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w_0, \quad (24)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{f}(z) = \bar{w}_0. \quad (25)$$

Funkcia f je **spojitá** v bode $z_0 \in \mathcal{D}(f)$, ak $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Pre spojitosť funkcie potom platia výsledky analogické s (24) a (25).

Príklad 11

Príkladom reálnych funkcií komplexnej premennej sú funkcie

$$w = \operatorname{Re} z, \quad w = |z|, \quad w = \arg z.$$

Jedná sa o jednoznačné funkcie. Funkcia $w = z^n$, pre $n \in \mathbb{N}$ pevné, je komplexná funkcia komplexnej premennej, kým funkcia $w = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, je komplexná funkcia reálnej premennej φ . Ďalej, funkcie

$$w = \operatorname{Arg} z, \quad w = \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ pevné,}$$

sú príkladmi mnohoznačných komplexných funkcií komplexnej premennej. Prvá z nich je nekonečne-značná, druhá je n -značná. Zúžením oboru hodnôt prvej z nich dostaneme napríklad už zmienenú jednoznačnú funkciu $\tilde{w} = \arg z$. Jednoznačnou vetvou druhej funkcie je napríklad funkcia (porovnaj s (12))

$$\tilde{w} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z}{n} + i \sin \frac{\arg z}{n} \right).$$

Príklad 12

Stanovme limitu

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}.$$

V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Poznamenajme, že konvergencia $z = x + iy \rightarrow 0$ je ekvivalentná s $x \rightarrow 0$ & $y \rightarrow 0$. Platí

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + iy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x - iy)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - i \frac{xy}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

Z reálnej analýzy funkcií dvoch premenných vieme ľahko ukázať, že limity

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

neexistujú. Podľa (24) potom neexistuje ani limita v zadaní príkladu.

Príklad 13

Vypočítajme limitu

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}.$$

V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + iy)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{yx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

V tomto prípade platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Preto podľa (24) limita v zadaní príkladu má hodnotu $0 + i0 = 0$.

Príklad 14

Zistíme limitu

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}.$$

V limitovanej funkcii vykonáme algebraické úpravy (rozklad čitateľa na súčin)

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z + i)(z - i)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z + i) = 2i.$$

Príklad 15

Rozhodnime o existencii limity

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}.$$

Dokážeme, že uvedená limita neexistuje. Nech z sa blíži k bodu $0 = 0 + i0$ po reálnej osi, t.j., $z = x \in \mathbb{R}$. Potom $\bar{z}/z = \bar{x}/x = x/x = 1$, a v tomto prípade $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}/z = 1$. Ak z sa bude k 0 blížiť po imaginárnej osi, t.j., $z = iy \in i\mathbb{R}$, potom platí $\bar{z}/z = -iy/iy = -1$, a v tomto prípade $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}/z = -1$. Pri pohybe po dvoch rôznych cestách do bodu 0 sme dostali dve rôzne hodnoty limity. Preto daná limita neexistuje.