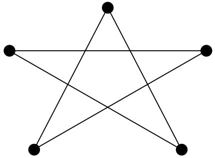
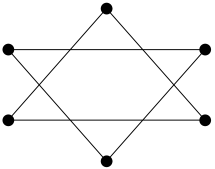
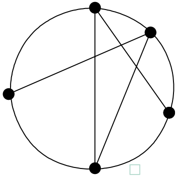
2 Souvislost grafů

Pokud máme graf, který modeluje nějaká spojení či síť, přirozeně nás zajímá, jakou máme možnost se dostat odněkud někam v tomto grafu. To má množství praktických motivací – například počítačové, dopravní, telefonní či potrubní sítě. Je pochopitelné, že v takových sítích chceme mít možnost se dostat z každého místa do každého jiného.

Grafům s takovou vlastností říkáme *souvislé*.







□

Stručný přehled lekce

- Definice souvislosti grafu, vrcholová / hranová, vyšší souvislost.
- Algoritmus procházení grafem (souvislou komponentou).
- Silná souvislost orientovaných grafů.
- Eulerovské tahy v grafu.

2.1 Spojení vrcholů, komponenty

Definice: *Sledem* délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n),$$

ve které vždy hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i.

Sled je vlastně procházka po hranách grafu z u do v. Příkladem sledu může být průchod IP paketu internetem (včetně cyklení). □

Lema 2.1. *Mějme relaci $\sim$ na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $u \sim v$ právě když existuje v G sled začínající v u a končící ve v. Pak $\sim$ je relací ekvivalence.*

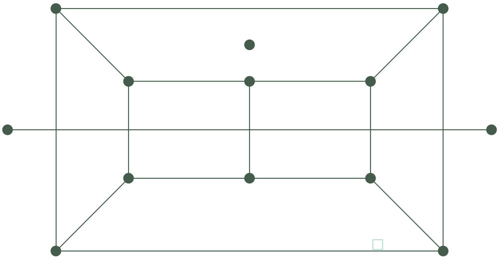
Důkaz. Relace $\sim$ je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou sledem délky 0. Symetrická je také, protože sled z u do v snadno obrátíme na sled z v do u. Stejně tak je $\sim$ tranzitivní, protože dva sledy můžeme na sebe navázat v jeden. □

Komponenty grafu

Definice: Třídy ekvivalence výše popsané (Lema 2.1) relace $\sim$ na $V(G)$ se nazývají *komponenty souvislosti* grafu G.

Jinak se taky *komponentami souvislosti myslí podgrafy* indukované na těchto třídách ekvivalence.

Podívejte se, kolik komponent souvislosti má tento graf:



Vidíte v obrázku všechny tři komponenty? Jedna z nich je izolovaným vrcholem, druhá hranou (tj. grafem isomorfním K_2) a třetí je to zbývající.

Připomeňme si, že *cesta v grafu* je vlastně sledem bez opakování vrcholů.

Věta 2.2. *Pokud mezi dvěma vrcholy grafu G existuje sled, pak mezi nimi existuje cesta.* □

Důkaz. Nechť $(u = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n = v)$ je sled délky n mezi vrcholy u a v v G. Začneme budovat nový sled W z vrcholu $w_0 = u$, který už bude cestou:

- Předpokládejme, že nový sled už má počátek $(w_0, e_1, w_1, \ldots, w_i) = W$ (na začátku $i = 0$, tj. jen (w_0) bez hran), kde $w_i = v_j$ pro některé $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. □
- Najdeme největší index $k \geq j$ takový, že $v_k = v_j = w_i$, a sled W pokračujeme krokem $(\ldots , w_i = v_j = v_k, e_{k+1}, w_{i+1} = v_{k+1})$. □
- Zbývá dokázat, že nový vrchol $w_{i+1} = v_{k+1}$ se ve sledu W neopakuje. Pokud by tomu ale tak bylo $w_l = w_{i+1}$, $l \leq i$, pak bychom na vrchol w_{i+1} „přeskočili“ už dříve z vrcholu w_l, spor.
- Konstrukce je hotova, když $w_i = v$. □

□

Ačkoliv uvedený důkaz vypadá složitě, je to jen jeho formálním zápisem. Ve skutečnosti se v důkaze neděje nic jiného, než že se původní sled zkracuje o opakované vrcholy, až nakonec zákonitě vznikne cesta. Jeho výhodou je konstruktivnost – vidíme, jak cestu získat.

Důkaz kratší, ale nekonstruktivní, pro Větu 2.2:

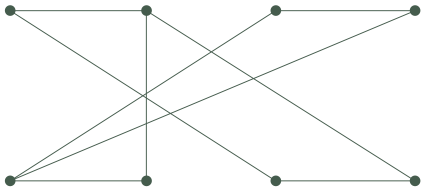
Pokud mezi dvěma vrcholy grafu G existuje sled, pak mezi nimi existuje cesta.

Ze všech sledů mezi vrcholy u a v v G vybereme sled W s nejmenší délkou. Je snadno vidět, že pokud W zopakuje některý vrchol grafu G, můžeme W ještě zkrátit, a to je spor s předpokladem. Proto je W cestou v G. □ □

Základní souvislost grafu

Závěrem se dostáváme k nejdůležitější definici souvislého grafu:

Definice 2.3. **Graf G je souvislý**
pokud je G tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy G jsou spojené cestou (dle Věty 2.2).



2.2 Prohledávání grafu

Pro vytvoření co nejobecnějšího schématu algoritmu pro procházení grafu vystačíme s následujícími datovými stavy a pomocnou strukturou:

- **Vrchol**: má stavy ...
  - iniciační – dostane na začátku,
  - nalezený – poté, co jsme jej přes některou hranu nalezli (a odložili ke zprac.),
  - zpracovaný – poté, co jsme už probrali všechny hrany z něj vycházející.
  - (Případně ještě stav „post-zpracovaný“, po dokončení všech následníků.)
- **Hrana**: má stavy ...
  - iniciační – dostane na začátku,
  - zpracovaná – poté, co už byla probrána od jednoho ze svých vrcholů. □
- **Úschovna**: je pomocná datová struktura (množina),
  - udržuje odložené, tj. nalezené a ještě nezpracované vrcholy.

Způsob, kterým se vybírají vrcholy z úschovny ke zpracování, určuje variantu algoritmu procházení grafu. Zde pro větší obecnost dokonce v úschovně udržujeme vrcholy spolu s příchozími hranami. V prohledávaných vrcholech a hranách se pak provádějí konkrétní programové akce pro prohledání a zpracování našeho grafu.

Algoritmus 2.4. Generické procházení souvislé komponenty G grafu

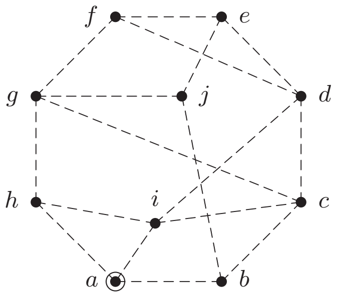
Algoritmus projde a zpracuje každou hranu a vrchol souvislého grafu G.

```
vstup < graf G;
stav(všechny vrcholy a hrany G ) < iniciační;
úschovna U = {(∅, v0)}, pro libovolný vrchol v0 grafu G;
strom prohledávání T = ∅;
while (U je neprázdná) {
    zvolit (e,v) ∈ U;
    U = U \ {(e,v)};
    if (e ≠ ∅) ZPRACUJ(e);
    if (stav(v) ≠ zpracovaný) {
        foreach (f hrana vycházející z v) {
            w = opačný vrchol hrany f = vw;
            if (stav(w) ≠ zpracovaný)                          (*)
                U = U ∪ {(f,w)};
        }
        ZPRACUJ(v);
        stav(v) = zpracovaný;
        T = T ∪ {e,v};
    }
}
G je zpracovaný;
```

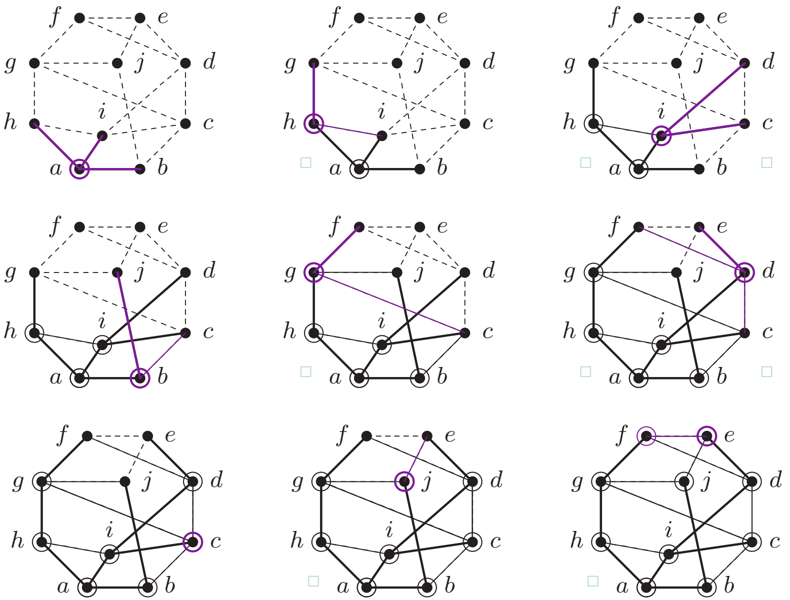
Algoritmus 2.5. Některé implementace procházení grafu;
tj. konkrétně implementace kroku „`zvolit (e,v) ∈ U`“ úschovny `U`.

- *Procházení „do šířky“, BFS* – úschovna `U` je implementovaná jako fronta, neboli je voleno $(e, v) \in U$ od prvních vložených do úschovny. □
- *Procházení „do hloubky“, DFS* – úschovna `U` je implementovaná jako zásobník, neboli je voleno $(e, v) \in U$ od posledních vložených do úschovny. □
- *Dijkstrův algoritmus* pro nejkratší cestu – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší k počátečnímu v_0. (Toto je dost podobné prohledávání do šířky, ale obecnější i pro případy, kdy hrany nejsou „stejně dlouhé“.) □

Příklad 2.15. *Ukázka průchodu následujícím grafem do šířky z vrcholu a.*

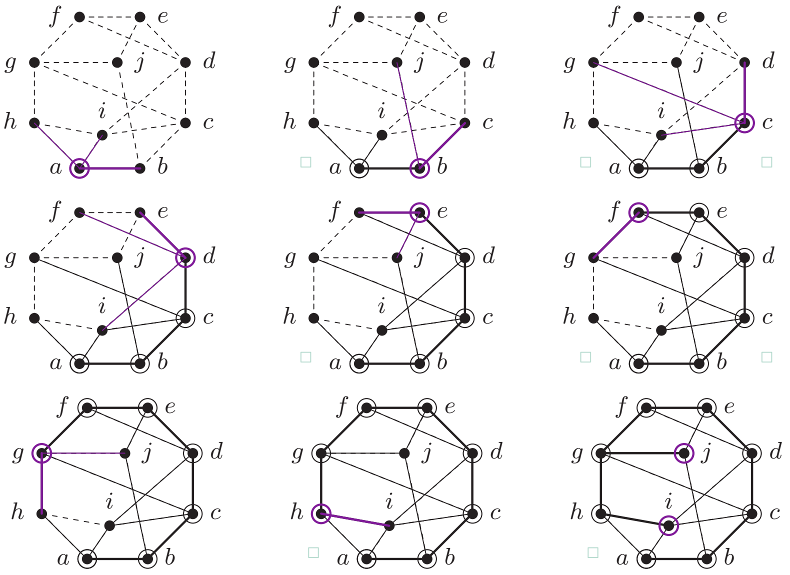


Značení v prohledávaném grafu: barevně aktuálně zpracovávaný vrchol a jeho hrany objevující nové vrcholy, kroužkem a plnou čarou již zpracované vrcholy a hrany, tlustě výsledný strom prohledávání.



□

Příklad 2.16. *Ukázka průchodu předchozím grafem do hloubky z vrcholu a.*



Vidíte rozdíly tohoto průchodu proti předchozímu příkladu? □

2.3 Vyšší úrovně souvislosti

V *síťových aplikacích* nás často zajímá nejen, jestli se za normálních podmínek můžeme pohybovat mezi vrcholy/uzly, ale také, jaké spojení můžeme nalézt v případě lokálních výpadků (odolnost a redundance).

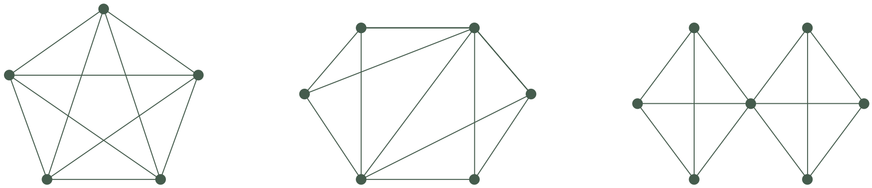
Toto lze teoreticky podchytit zkoumáním „vyšších“ stupňů souvislosti grafu. □

Definice: Graf G je *hranově k-souvislý*, $k > 1$, pokud i po odebrání libovolných nejvýše $k-1$ hran z G zůstane výsledný graf souvislý. □

Definice: Graf G je *vrcholově k-souvislý*, $k > 1$, pokud i po odebrání libovolných nejvýše $k-1$ vrcholů z G zůstane výsledný graf souvislý.
Speciálně úplný graf K_n je (definičně) vrcholově $(n-1)$-souvislý.

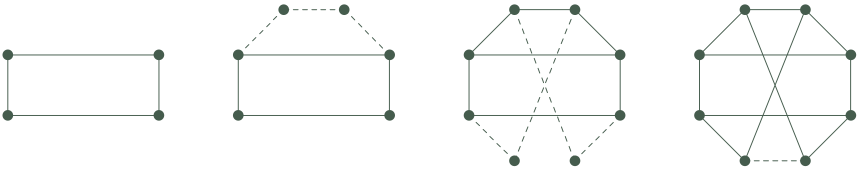
Pokud mluvíme jen o k-souvislém grafu, máme na mysli vrcholově k-souvislý graf. 1-souvislý graf je pouhé synonymum pro souvislý. □

Stručně řečeno, vysoká hranová souvislost znamená vysoký stupeň odolnosti sítě proti výpadkům spojení-hran, neboli síť zůstane stále dosažitelná, i když libovolných $k-1$ spojení bude přerušeno. Vysoká vrcholová souvislost je mnohem silnějším pojmem, znamená totiž, že síť zůstane dosažitelná i po výpadku libovolných $k-1$ uzlů-vrcholů (samozřejmě mimo těch vypadlých uzlů).



Na ilustračním obrázku má první graf vrcholovou souvislost 4 a snadno vidíme, že po odebrání tří vrcholů či hran zůstává souvislý. Z druhého grafu bychom museli odebrat nejméně 3 hrany, aby se stal nesouvislým, a proto je jeho hranová souvislost 3. Na druhou stranu však stačí odebrat 2 vrcholy, aby mezi jeho levým a pravým krajním vrcholem žádné spojení nezůstalo. (Vidíte, které dva?) A jak je tomu u třetího grafu? □

Věta 2.6. *Libovolný obyčejný graf je 2-souvislý, právě když jej lze vytvořit z kružnice „přidáváním uší“; tj. iterací operace, kdy libovolné dva stávající vrcholy grafu jsou spojeny novou cestou libovolné délky (ale ne paralelní hranou).*



Mengerova věta

Důkaz následujícího důležitého výsledku by nebyl jednoduchý při použití stávajících znalostí, proto jej ponecháme na pozdější lekce. . . („Toky v sítích“.)

Věta 2.7. *Graf G je hranově k-souvislý právě když mezi libovolnými dvěma vrcholy lze vést aspoň k hranově-disjunktních cest (vrcholy mohou být sdílené).*
Graf G je vrcholově k-souvislý právě když mezi libovolnými dvěma vrcholy lze vést aspoň k disjunktních cest (různých až na ty dva spojované vrcholy). □

Věta nám vlastně říká, že stupeň souvislosti grafu se přirozeně rovná stupni redundance spojení vrcholů. Na výše uvedeném obrázku mezi každými dvěma vrcholy prvního grafu můžeme vést až 4 disjunktní cesty.
U druhého grafu třeba mezi levým a pravým koncem lze vést jen 2 (vrcholově) disjunktní cesty, ale mezi každými dvěma vrcholy lze vést 3 hranově-disjunktní cesty.

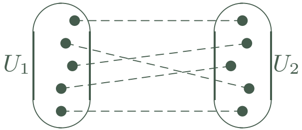
V duchu předchozí Mengerovy věty pokračujeme s následujícími poznatky.

Věta 2.8. *Nechť G je vrcholově 2-souvislý graf. Pak každé dvě hrany v G leží na společné kružnici.* □

Důkaz: Nechť $e, f \in E(G)$. Sestrojíme graf G' podrozdělením obou hran e, f novými vrcholy v_e, v_f. Je zřejmé, že i G' je vrcholově 2-souvislý graf, takže podle Věty 2.7 existují v G' dvě disjunktní cesty spojující v_e s v_f, tvořící spolu kružnici C'. Nakonec C' indukuje v G kružnici C procházející e i f. □ □

Rozšířením předchozí úvahy lze dokonce dokázat:

Věta 2.9. *Nechť G je vrcholově k-souvislý graf, $k \geq 1$. Pak pro každé dvě disjunktní množiny $U_1, U_2 \subset V(G)$, $|U_1| = |U_2| = k$ v G existuje k po dvou disjunktních cest z vrcholů U_1 do vrcholů U_2.*



2.4 Souvislost v orientovaných grafech

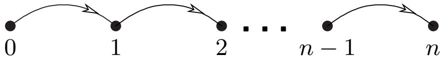
Začneme analogicky Oddílu 2.1.

Definice: *Orientovaným sledem* délky n v orientovaném grafu D rozumíme střídavou posloupnost vrcholů a orientovaných hran

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n \,,$$

ve které vždy hrana e_i míří z vrcholu v_{i-1} do vrcholu v_i. □

Věta 2.10. *Pokud mezi dvěma vrcholy grafu D existuje orientovaný sled, pak mezi nimi existuje orientovaná cesta.*



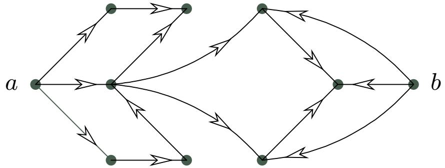
Pohledy na orientovanou souvislost

Prvním možným pohledem na souvislost orientovaných grafů je prostě požadovat grafovou souvislost po „zapomenutí" směru šipek. Toto se nazývá *slabá souvislost*. □

Jiný přístup je následovný:

Definice: Orientovaný graf D je *dosažitelný směrem ven*, pokud v něm existuje vrchol $v \in V(D)$ takový, že každý vrchol $x \in V(D)$ je dosažitelný orientovaným sledem z v.
□

Podrobným zkoumáním následujícího obrázku zjistíme, že tento graf není dosažitelný směrem ven, neboť chybí možnost dosáhnout vrchol b úplně vpravo. Na druhou stranu po vypuštění b je zbylý graf dosažitelný ven z vrcholu a vlevo.



Silná souvislost

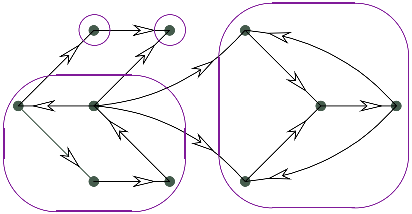
Nakonec „symetrizací“ přístupu dosažitelnosti se dobereme definici tzv. *silné souvislosti*, která je nejčastěji zmiňována u orientovaných grafů.

Lema 2.11. *Nechť $\approx$ je binární relace na vrcholové množině $V(D)$ orientovaného grafu G taková, že $u \approx v$ právě když existuje dvojice orientovaných sledů – jeden z u do v a druhý z v do u v grafu D. Pak $\approx$ je relace ekvivalence.* □

Definice 2.12. **Silné komponenty** orientovaného grafu D jsou třídy ekvivalance relace $\approx$ z Lematu 2.11. □

Orientovaný graf D je *silně souvislý* pokud má nejvýše jednu silnou komponentu.

Pro ilustraci si uvedem následující příklad orientovaného grafu vlevo, jenž má čtyři vyznačené silné komponenty.

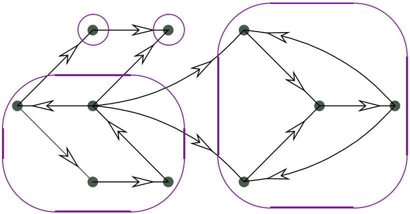


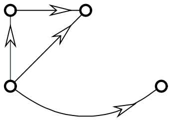
Kondenzace orientovaného grafu

Definice: Orientovaný graf, jehož vrcholy jsou tvořeny jednotlivými silnými komponentami orientovaného grafu D a šipky vedou právě mezi těmi dvojicemi různých komponent, mezi kterými vedou hrany v D, nazveme *kondenzací* grafu D. □

Definice: Orientovaný graf D je *acyklický*, pokud neobsahuje or. cyklus. □

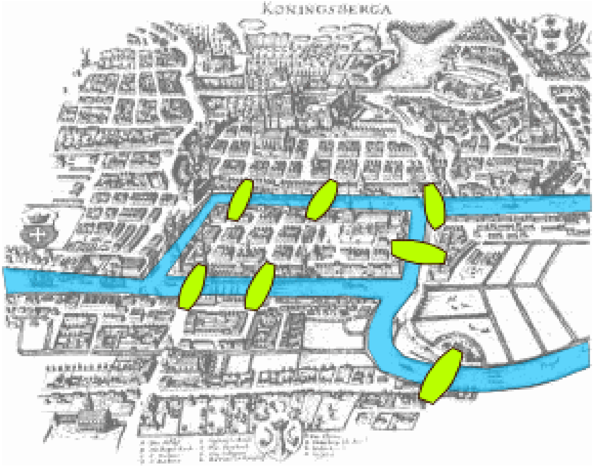
Tvrzení 2.13. *Kondenzace každého orientovaného grafu je acyklický orientovaný graf.*





2.5 Jedním tahem: Eulerovské grafy

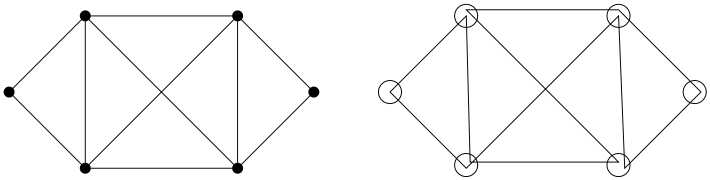
Pravděpodobně *nejstarší zaznamenaný výsledek teorie grafů* pochází od L. Eulera – jedná se o slavných 7 mostů v Královci / Königsbergu / dnešním Kaliningradě.



O jaký problém se tehdy jednalo? Městští radní chtěli vědět, zda mohou suchou nohou přejít po každém ze sedmi vyznačených mostů právě jednou.

Rozbor tohoto problému vede k následující definici a odpovědi.

Definice: *Tah* je sled v grafu bez opakování hran.
Uzavřený tah je tahem, který končí ve vrcholu, ve kterém začal. *Otevřený tah* je tahem, který končí v jiném vrcholu, než ve kterém začal.



Onen slavný výsledek teorie grafů od Leonharda Eulera poté zní: □

Věta 2.14. *Graf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G jsou sudého stupně.* □

Důsledek 2.15. *Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G až na dva jsou sudého stupně.*

Důkaz: Dokazujeme oba směry ekvivalence. Pokud lze G nakreslit jedním uzavřeným tahem, tak je zřejmě souvislý a navíc má každý stupeň sudý, neboť uzavřený tah každým průchodem vrcholem „ubere" dvě hrany. □

Naopak zvolíme mezi všemi uzavřenými tahy T v G ten (jeden z) nejdelší. Tvrdíme, že T obsahuje všechny hrany grafu G.

- Pro spor vezměme graf $G' = G - E(T)$, o kterém předpokládejme, že je neprázdný. Jelikož G' má taktéž všechny stupně sudé, je (z indukčního předpokladu) libovolná jeho komponenta $C \subseteq G'$ nakreslená jedním uzavřeným tahem T_C. □
- Vzhledem k souvislosti grafu G každá komponenta $C \subseteq G'$ protíná náš tah T v některém vrcholе w, a tudíž lze oba tahy T_C a T „propojit přes w". To je spor s naším předpokladem nejdelšího možného T. □

□

Důkaz důsledku: Nechť u, v jsou dva vrcholy grafu G mající lichý stupeň, neboli dva (předpokládané) konce otevřeného tahu pro G. Do G nyní přidáme nový vrchol w spojený hranami s u a v. Tím jsme náš případ převedli na předchozí případ grafu se všemi sudými stupni. □