7 Barevnost a další těžké problémy

Pro motivaci této lekce se podíváme hlouběji do historie počátků grafů v matematice. Kromě slavného problému *sedmi mostů v Královci* (dnešním Kaliningradě) je za další historický milník vývoje teorie grafů považován *problém čtyř barev* pocházející z poloviny 19. století: Kolik nejméně barev je třeba použít na obarvení politické mapy pro rozlišení sousedních států?

Na rozdíl od sedmi mostů, problém čtyř barev zůstal nevyřešený po více než 100 let a stimuloval rozvoj skoro všech moderních oblastí teorie grafů.

Někteří však kladou prapočátky grafů v matematice daleko před Eulerovými sedmi mosty či problémem čtyř barev, až ke středověké otázce, zda lze šachovým *koněm obejít celou šachovnici* bez opakování. Tato otázka vede v moderním pojetí k dalšímu zajímavému a obtížnému problému tzv. *Hamiltonovské kružnice* v grafu. . . □

Stručný přehled lekce

- Definice barevnosti grafu, základní vlastnosti.
- Varinaty problému barvení.
- Další „obtížné“ problémy jako Hamiltonovská kružnice.
- Algoritmická složitost (NP-úplnost) základních grafových problémů.

7.1 Barevnost grafu

Nejprve si uveďme pojem barevnosti – představme si, že hrany grafu nám říkají, že jejich koncové vrcholy musí být barevně odlišené (třeba proto, že reprezentují sousední státy, nebo proto, že jinak jsou si příliš podobné a je třeba je jinak rozlíšit, atd).□ Samozřejmě bychom mohli každému vrcholu grafu dát jinou barvu, ale k čemu by pak takový problém byl? My bychom chtěli použít barev celkem co nejméně. □

Definice: *Obarvením grafu* G pomocí k barev myslíme libovolné zobrazení

$$c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

takové, že každé dva vrcholy spojené hranou dostanou různé barvy, tj. $c(u) \neq c(v)$ pro všechny $\{u, v\} \in E(G)$.

Definice 7.1. Barevnost grafu G
je nejmenší číslo $\chi(G)$ pro které existuje obarvení grafu G pomocí $\chi(G)$ barev. □

Čísla $1, 2, \ldots, k$ z předchozí definice tak nazýváme barvami vrcholů (je to pohodlnější, než popisovat barvy běžnými jmény jako bílá, červená, atd).

Poznámka: Uvědomme si, že barevnost lze definovat pouze pro graf bez smyček, protože oba konce smyčky mají vždy stejnou barvu a nic víc s tím „nenaděláme".

Lema 7.3. *Mějme jednoduchý graf (bez smyček) G a jeho libovolný podgraf $H \subseteq G$. Pak $\chi(H) \leq \chi(G)$.* □

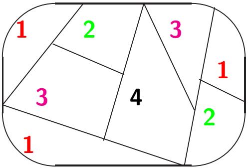
Důkaz: Zřejmě postačí použít restrikci obarvení grafu G na vrcholy podgrafu H. □

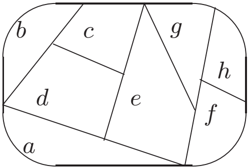
Říkáme, že barevnost grafu je *monotónní na podgrafy*. □

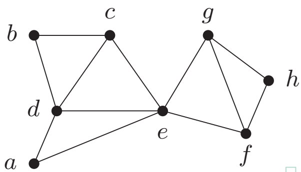
Lema 7.4. *Nechť G je jednoduchý graf (bez smyček) na n vrcholech. Pak $\chi(G) \leq n$ a rovnost nastává právě když $G \simeq K_n$ je úplný graf.* □

Důkaz: Stačí každý vrchol obarvit jinou barvou a máme skutečné obarvení n barvami dle definice. Navíc pokud některá dvojice u, v vrcholů není spojená hranou, můžeme volit lepší obarvení $c(u) = c(v) = 1$ a zbylé vrcholy různými barvami $2, 3, \ldots, n-1$, tj. pak $\chi(G) < n$. □

Příklad 7.5. *Vraťme se k příkladu „barvení“ mapy z úvodu lekce a ukažme si, jak mapy souvisejí s grafy a jejich barevností.*

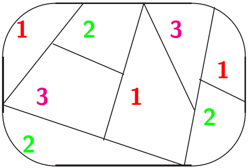


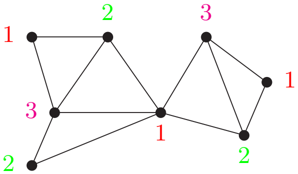




Jednotlivé oblasti na mapě (předpokládáme, že každý stát má souvislé území, tj. státy = oblasti) prohlásíme za vrcholy našeho grafu a sousední dvojice států spojíme hranami. Nezapomeňme, že „sousední“ znamená sdílení celého úseku hranice, ne jen jednoho rohu. □

Při troše snahy také najdeme lepší obarvení uvedené mapy využívající pouhých tří barev:



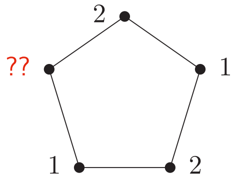


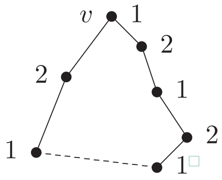
□

Věta 7.6. *Neprázdný graf G má barevnost 1 právě když nemá žádné hrany.*
G má barevnost ≤ 2 právě když nemá žádnou kružnici liché délky jako podgraf. □

Důkaz: Pokud graf nemá hrany, můžeme všechny vrcholy obarvit stejnou barvou 1. Naopak pokud mají všechny vrcholy stejnou barvu, nemůže graf mít žádnou hranu.□

Druhá část: Na jednu stranu, lichou kružnici nelze obarvit dvěma barvami, viz obrázek. Na druhou stranu si představme, že zvolíme libovolný vrchol v grafu G s barvou 1 a ostatní vrcholy obarvíme takto: Vrcholy, jejichž vzdálenost od v je lichá, obarvíme 2. Vrcholy, jejichž vzdálenost od v je sudá, obarvíme 1.





Pokud bychom tak získali třeba dva vrcholy spojené hranou f v sudé vzdálenosti od v, získáme uzavřený sled S liché délky přes f a v. Stejně tak pro dva vrcholy v liché vzdálenosti. Ponecháme-li ze sledu S ty hrany, které se opakují lichý počet krát, dostaneme Eulerovský podgraf T lichého počtu hran. Jak již víme (Oddíl 5.1), T pak obsahuje kružnici a tudíž jej lze induktivně sestrojit jako hranově-disjunktní sjednocení kružnic. Avšak sjednocení kružnic sudé délky nevytvoří T liché velikosti, spor. Proto naše obarvení za daných předpokladů nemůže dát stejnou barvu sousedním vrcholům, a tudíž dvě barvy stačí. □

7.2 Jak obarvit graf

Hladové obarvování

Definice: Graf G je *k-degenerovaný*, pokud každý podgraf G obsahuje vrchol stupně nejvýše k.

Příkladem k-degenerovaného grafu je každý graf stupně nejvýše k, ale na druhou stranu k-degenerované grafy mohou mít vysoké stupně. (Nestačí však mít jen nízký nejmenší stupeň!) □

Věta 7.7. *Každý k-degenerovaný graf lze správně hladově obarvit $k+1$ barvami.* □

Důkaz: Jelikož graf G je k-degenerovaný, vybereme libovolný jeho vrchol v_1 stupně nejvýše k a rekurzivní aplikací tohoto postupu obarvíme podgraf $G - v_1$, který je podle definice také k-degenerovaný. Nakonec si všimneme, že $\leq k$ sousedé vrcholu v_1 dostanou nejvýše k různých barev, takže v_1 dobarvíme zbylou barvou. □

Důležité aplikace této věty uvidíme v příští lekci, avšak jedno zajímavé zesílení (*Brooksovu větu*) si uvedeme nyní:

Věta 7.8. *Nechť G je souvislý jednoduchý graf maximálního stupně $k \geq 2$. Pak $\chi(G) \leq k$ až na případy, kdy G je úplný graf nebo lichá kružnice.*

Důkaz (náznak): Pro $k = 2$ plyne tvrzení z Věty 7.6. Nechť tedy $k \geq 3$. V jednom směru je jasné, že $\chi(K_{k+1}) = k + 1$. Naopak tedy předpokládejme, že G není úplný. Zároveň se omezme jen na případ, že G má všechny stupně rovné k, neboť jinak lze aplikovat postup z Věty 7.7. □

- Prvním krokem nahlédneme, že pak G obsahuje dva nespojené vrcholy u, v se společným sousedem w. Pokud ale je graf $G - \{u, v\}$ nesouvislý, pak graf příslušně rozdělíme a indukcí po částech obarvíme. □

- Přidejme tedy předpoklad, že $G - \{u, v\}$ je souvislý. Druhým krokem nahlédneme, že graf H vzniklý z $G - w$ ztotožněním u s v do jednoho vrcholu je $(k - 1)$-degenerovaný. □

- Tudíž graf H hladově obarvíme k barvami podle Věty 7.7. Po opětovném „rozpojení" vrcholů u, v získáme obarvení $G - w$ k barvami takové, že u, v mají stejnou barvu. Nyní w má v sousedství nejvýše $k - 1$ barev a G celý obarvíme.

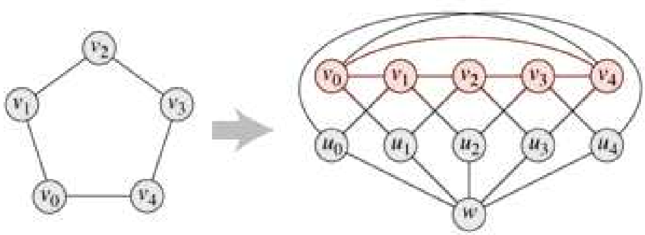
□

Grafy vysoké barevnosti

Ke správnému pochopení barevnosti grafu je nezbytné se zamyslet, které grafy mají vysokou barevnost. Jedná se například o grafy obsahující velké kliky (úplné podgrafy). Je to však vše? □

Není! Lze nalézt grafy s libovolně vysokou barevností neobsahující ani trojúhelníky. Třeba známá Mycielského konstrukce nám dává toto:

Tvrzení 7.9. *Graf získaný z grafu G následující konstrukcí (viz obrázek) má barevnost $\chi(G)+1$ a neobsahuje trojúhelníky, pokud je neobsahuje ani G.*



□

Nejobecněji lze říci následující překvapivě silné tvrzení nalezené Erdősem:

Věta 7.10. *Pro každá $c, r > 0$ existuje graf s barevností alespoň c a neobsahující kružnice kratší než r.*

7.3 Variace na barevnost a jiné

Definice 7.11. **Hranová barevnost** grafu G.
Hledáme obarvení $c_e(E(G)) \to \{1,2,\ldots,k\}$ takové, že žádné dvě hrany se společným vrcholem nedostanou stejnou barvu.

Nejmenší možný počet barev k, pro které hranové obarvení existuje, se nazývá *hranová barevnost* $\chi_e(G)$ grafu. □

Na rozdíl od běžné barevnosti umíme hranovou barevnost velmi dobře aproximovat za použití této Vizingovy věty.

Věta 7.12. *Pro každý jednoduchý graf platí* $\Delta(G) \le \chi_e(G) \le \Delta(G)+1$. □

Platí, že většina grafů splňuje $\Delta(G) = \chi_e(G)$. Umíte jednoduše sestrojit (a dokázat) příklady pro druhý případ?

Problém přesného určení hranové barevnosti grafu však stále zůstává algoritmicky velmi obtížný a také úzce souvisí s problémem čtyř barev.

Výběry barev z vlastních seznamů

Ještě jiný přístup, tentokrát zpět s barvením vrcholů, představuje myšlenka určit každému vrcholu jeho vlastní seznam barev k výběru (který se může lišit od ostatních).

Definice 7.13. **Výběrová barevnost** grafu G.
Je dán graf G spolu s přiřazenými „seznamy barev“ $L : V(G) \to \binom{\mathbb{N}}{k}$ (k-prvkové podmnožiny). Nyní hledáme obarvení $c_{ch}(V(G)) \to \mathbb{N}$ takové, že žádné dva sousední vrcholy nedostanou stejnou barvu a navíc $c_{ch}(v) \in L(v)$ pro každý vrchol v.

Nejmenší možná délka k seznamů barev, pro kterou výběrové obarvení vždy existuje (tj. pro každou možnou takovou volbu seznamů), se nazývá *výběrová barevnost* $ch(G)$ grafu. □

Výběrová barevnost může (kupodivu!) být libovolně „vzdálena“ běžné barevnosti.

Tvrzení 7.14. *Pro každé k nalezneme bipartitní graf s výběrovou barevností větší než k.* □

Fakt: Hranová výběrová barevnost úplných bipartitních grafů úzce souvisí se známým problémem tzv. “latinských obdélníků”.

Hamiltonovské grafy

Mimo samotné „barvící" problémy si jako typickou ukázku další těžké grafové úlohy uvedeme jinou historicky známou otázku:

Definice: Kružnice C obsažená v grafu G se nazývá *Hamiltonovská*, pokud C prochází všemi vrcholy G. Obdobně mluvíme o *Hamiltonovské cestě* P v G, pokud cesta $P \subset G$ prochází všemi vrcholy G.

Graf G je *Hamiltonovský*, pokud obsahuje Hamiltonovskou kružnici. □

Možná to zní překvapivě, ale i problém Hamiltonovské kružnice úzce souvisel s řešením problému čtyř barev. To je však mimo rámec našeho textu.

Místo toho si ukážeme následující krásný výsledek Diraca:

Věta 7.15. *Každý jednoduchý graf na $n \geq 3$ vrcholech s minimálním stupněm $\geq n/2$ je Hamiltonovský.* □

Důkaz (náznak): Nechť P je nejdelší cesta v grafu G s vrcholy po řadě $u_0, u_1, \ldots, u_k$. Podle její maximality leží každý soused u_0 i u_k na P. Pak existuje $0 < i < k$ takové, že $u_0 u_{i+1} \in E(G)$ a zároveň $u_k u_i \in E(G)$. Pak $u_0 u_{i+1} \, P \, u_k u_i \, P$ tvoří kružnici v G a snadno plyne, že se jedná o Hamiltonovskou kružnici. □

7.4 $\mathcal{NP}$-úplnost grafových problémů

Definice složitostní třídy $\mathcal{NP}$ se týká výhradně rozhodovacích problémů (s odpovědí „ANO/NE“). Dá se neformálně říci, že problém patří do třídy $\mathcal{NP}$, pokud jeho odpověď ANO lze prokázat (ve smyslu „uhodnout a ověřit“) výpočtem, který běží v polynom. čase.

$\mathcal{NP}$-úplné problémy jsou zhruba řečeno ty, které ve třídě $\mathcal{NP}$ mají nejvyšší obtížnost řešení.

Od jednoho $\mathcal{NP}$-úplného problému A se dostaneme k jinému B tzv. *polynomiálním převodem*: Ukážeme, jak bychom ze známého postupu řešení B efektivně nalezli řešení lib. instance A. □

Nyní si ukážeme vhodnými převody, že oněch „nejobtížnějších“ ($\mathcal{NP}$-úplných) problémů je v teorii grafů mnoho, bohužel by se dalo říci většina. To ostatně ukazuje, proč jsme zatím v praxi tak málo úspěšní při počítačovém řešení mnohých praktických problémů – přesné a efektivní řešení $\mathcal{NP}$-úplných úloh se totiž považuje za nemožné.

Problém 7.16. 3-SAT (splnitelnost logických formulí ve spec. verzi)
Následující problém je $\mathcal{NP}$-úplný:

Vstup: Logická formule Φ v konjunktivním normálním tvaru taková, že každá klauzule obsahuje nejvýše 3 literály.

Výstup: Existuje logické ohodnocení proměnných tak, aby výsledná hodnota Φ byla 1 (pravda)?

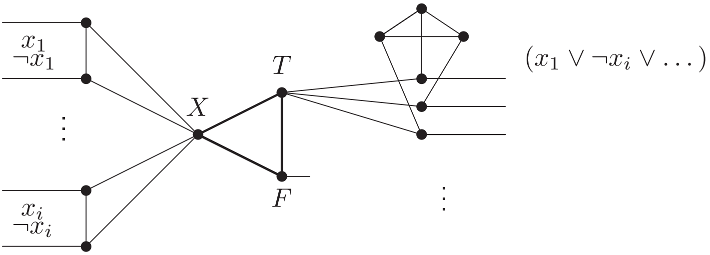
Příkladem formule problému 3-SAT je třeba $\Phi \equiv (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

Problém 7.17. 3-COL (3-obarvení grafu)
Následující problém je $\mathcal{NP}$-úplný:

Vstup: Graf G.

Výstup: Lze vrcholy G korektně obarvit 3 barvami?

Důkaz (náznak): Ukážeme si polynomiální převod z problému 3-SAT. □
Sestrojíme graf G pro danou formuli Φ. Základem grafu je trojúhelník, jehož vrcholy označíme X, T, F. Každé proměnné x_i ve Φ přiřadíme dvojici vrcholů spojených s X. Každé klauzuli ve Φ přiřadíme podgraf na 6 vrcholech (z nichž tři jsou spojené s T), jako na obrázku. Nakonec volné „půlhrany“ z obrázku pospojujeme dle toho, jaké literály vystupují v klauzulích.

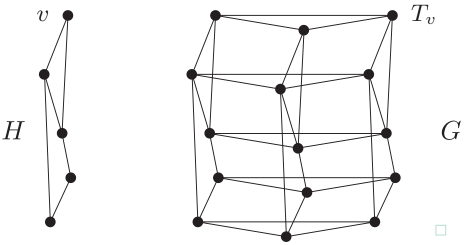


Pak G má 3-obarvení právě když je Φ splnitelná, jak si lze ověřit na obrázku. □

Problém 7.18. IS (nezávislá množina)
Následující problém je $\mathcal{NP}$-úplný:

Vstup: Graf G a přirozené číslo k.
Výstup: Lze v G najít nezávislou podmnožinu velikosti (aspoň) k? □

Důkaz: Ukážeme polynomiální převod z problému 3-COL.
Nechť H je graf na n vrcholech, který je za úkol obarvit třemi barvami. Položíme $k = n$ a graf G sestrojíme ze tří disjunktních kopií grafu H takto:

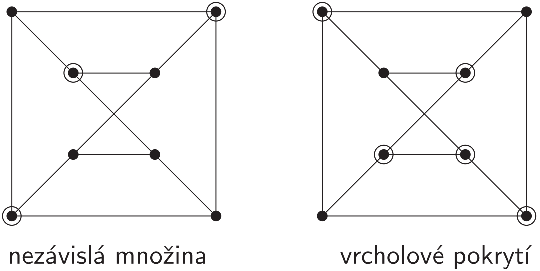


Pokud $c : V(H) \to \{1,2,3\}$ je obarvení H třemi barvami, v grafu G lze vybrat $k = n$ nezávislých vrcholů tak, že pro každý $v \in V(H)$ vezmeme $c(v)$-tou kopii vrcholu v v grafu G. Naopak pokud I je nezávislá množina v grafu G o velikosti $k = n$, pak z každého trojúhelníku T_v, $v \in V(H)$ náleží do I právě jeden vrchol. Podle toho již určíme jednu ze tří barev pro vrchol v v H. □

Problém 7.19. VC (vrcholové pokrytí)
Následující problém je $\mathcal{NP}$-úplný:

Vstup: Graf G a přirozené číslo k.
Výstup: Lze v G najít *vrcholové pokrytí*, tj. množinu $C \subseteq V(G)$ takovou, že každá hrana G má alespoň jeden konec v C, o velikosti nejvýše k? □

Důkaz: Ukážeme polynomiální převod z problému IS. Nechť G je graf na n vrcholech, v němž máme najít nezávislou množinu I velikosti ℓ. Všimněme si, že doplněk $C = V(G) \setminus I$ nezávislé množiny I je vlastně vrcholovým pokrytím. Takže v našem převodu stačí použít stejný graf G a $k = n - \ell$. □

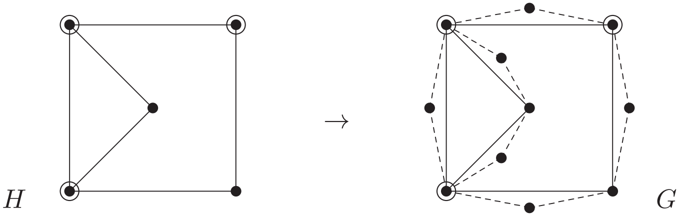


Problém 7.20. DOM (dominující množina)
Následující problém je $\mathcal{NP}$-úplný:

Vstup: Graf G a přirozené číslo k.

Výstup: Lze v G najít dominující množinu, tj. množinu $D \subseteq V(G)$ takovou, že každá vrchol G má některého souseda v D, o velikosti nejvýše k? □

Důkaz (náznak): Problém dominující množiny jasně patří do $\mathcal{NP}$ a jeho úplnost je dokázána následujícím schematickým polynomiálním převodem.



Pro daný graf H vytvoříme graf G přidáním, pro každou hranu $e \in E(H)$, nového vrcholu v_e spojeného hranami do obou koncových vrcholů hrany e. (Tak se vlastně z každé hrany stane trojúhelník s třetím novým vrcholem, viz naznačený obrázek.) Číselný parametr k zůstane tentokrát nezměněn. Nyní zbývá dokázat, že G má vrcholové pokrytí velikosti k, právě když H má dominující množinu velikosti také k, což není obtížné. □

Problém 7.21. HC (Hamiltonovský cyklus)
Následující problém je $\mathcal{NP}$-úplný:

Vstup: Orientovaný graf G.

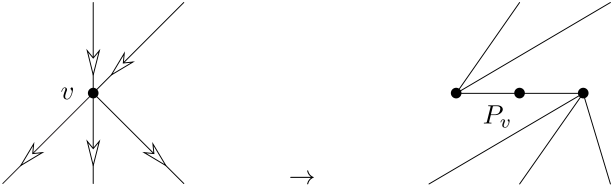
Výstup: Lze v G najít orientovanou kružnici (cyklus) procházející všemi vrcholy? □

Problém 7.22. HK (Hamiltonovská kružnice)
Následující problém je $\mathcal{NP}$-úplný:

Vstup: Graf G.

Výstup: Lze v G najít kružnici procházející všemi vrcholy? □

Důkaz:



Použijeme snadný převod z předchozího problému HC. Každý vrchol v orientovaného grafu H nahradíme třemi vrcholy tvořícími cestu P_v délky 2 v grafu G. Orientované hrany grafu Hpřicházející do v pak přivedeme do prvního vrcholu cesty P_v, hrany odcházející z v naopak vedeme z posledního vrcholu cesty P_v. □

7.5 Příběh problému vrcholového pokrytí

Ač se to nezdá, někdy i zcela okrajová a poněkud banální otázka může nakonec vést k dalekosáhlým závěrům a novým teoriím... Co třeba proč zdánlivě velmi „podobné“ problémy jako vrcholové pokrytí VC a dominující množina DOM mají (přestože oba $\mathcal{NP}$-úplné) tak rozdílné algoritmické chování? Vysvětlení [R. Downey and M. Fellows, Parameterized complexity, Springer 1999] by nás dovedlo až ke zcela novému pohledu na výpočetní složitost problémů, který jde „jaksi mimo“ klasickou polynomiální hierarchii a umožňuje v jistých situacích docela rozumně řešit i některé problémy, které jsou jinak $\mathcal{NP}$-těžké. □

Takže v čem spočívá zásadní rozdíl v našich znalostech o řešení problémů *dominující množiny* a *vrcholového pokrytí*?

- Pokud se v analýze zaměříme na hodnotu parametru k vstupu, tak dominující množinu velikosti k stejně nedokážeme nalézt rychleji než probráním prakticky všech k-tic vrcholů grafu G.

  To je i pro malé fixní hodnoty k, třeba $k = 10, 20$, v praxi neproveditelné. □

- Avšak vrcholové pokrytí velikosti k dokážeme nalézt jednoduchým algoritmem v čase $O(2^k \cdot n)$, což pro malé fixní hodnoty k, třeba opět $k = 10, 20$, dává skvěle použitelný lineární algoritmus!

Algoritmus 7.24. k-VC (vrcholové pokrytí)

Pro fixní k „poměrně rychle“ vyřešíme následující problém.

Vstup: Graf G.

Výstup: Lze v G najít vrcholové pokrytí o velikosti nejvýše k? □

Pro inicializaci položíme $C = \emptyset$ a $F = E(G)$.

- Pokud $F = \emptyset$, vracíme C jako vrcholové pokrytí.
  Jinak pokud $|C| \geq k$, vracíme odpověď NE.
- Vybereme libovolnou hranu $f = uv \in F$ a pro oba její konce $x = u, v$ uděláme:
  - $C' = C \cup \{x\}$ a nová množina hran F' vzniká z F odebráním všech hran vycházejících z vrcholu x v G.
  - Rekurzivně zavoláme tento algoritmus pro G, C' a F'. □

Kolik tento algoritmus provede rekurzivních volání celkem? Každý průchod generuje dvě další volání, ale jen do fixní hloubky k rekurze, takže ve výsledku bude čas výpočtu asymptoticky jen $O(2^k \cdot n)$.

Poznámka: Dnes je již známo, že faktor 2^k lze promyšlenějším přístupem „vylepšit“ na mnohem menší základ mocniny. (2006: 1.2738^k)