9 Povídání o průnikových grafech

Od této lekce teorie grafů se zlehka zaměříme na několik vybraných partií teorie grafů blízkých autorovu srdci…

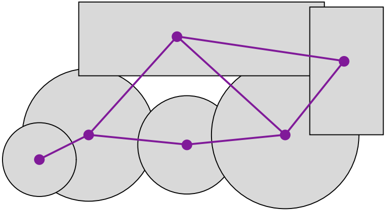
Naším prvním výběrem jsou *průnikové grafy*, což jsou grafy, jejichž vrcholy jsou jisté množiny a hrany spojují pronikající se dvojice. Naší hlavní motivací studia těchto grafů je jejich geometrická názornost a aplikovatelnost v reálných situacích.

Stručný přehled lekce

- Co jsou průnikové grafy, příklad intervalových grafů.
- Chordální grafy a jejich vlastnosti.
- Některé další často studované třídy průnikových grafů.
- Reprezentace grafů křivkami a úsečkami.

9.1 Průnikové a intervalové grafy

Definice 9.1. **Průnikovým grafem** množinového systému $\mathcal{M}$ nazveme graf $I_{\mathcal{M}}$ na vrch. $V = \mathcal{M}$ s množinou hran $E = \big\{\{A, B\} \subset \mathcal{M} : A \cap B \neq \emptyset\big\}$.



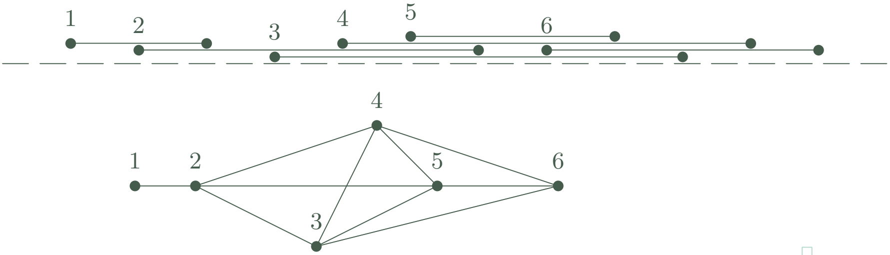
Poznamenáváme také, že nejčastěji studované typy průnikových grafů mají „geometrickou povahu", tj. jejich množiny jsou definovány jako geometrické objekty. □

Fakt: Třídy průnikových grafů jsou vždy uzavřené na indukované podgrafy. □

Tvrzení 9.2. *Každý jednoduchý graf je isomorfní průnikovému grafu nějakého vhodného systému množin.*

Intervalové grafy

Z celého spektra možných typů průnikových grafů se blíže podíváme na průnikové grafy intervalů na přímce – *intervalové grafy* (zkratka *INT*).



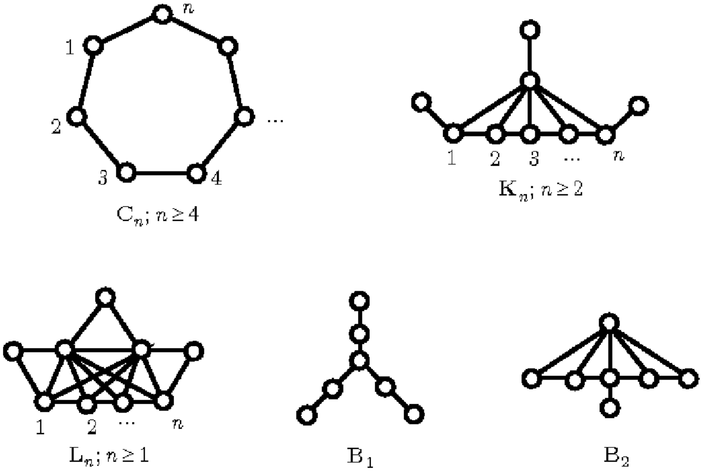
□

Vzpomeňte si, že s intervalovými grafy jsme se vlastně setkali už v Problému 6.5 řešícím přidělení pracovních úkolů, tj. barvení příslušného intervalového grafu. □

Lema 9.3. *Každá kružnice délky větší než tři v intervalovém grafu má chordu, tj. indukuje hranu spojující nesousední vrcholy kružnice.*

Věta 9.4. *Třídu všech intervalových grafů lze charakterizovat pomocí násl. tvrzení.*

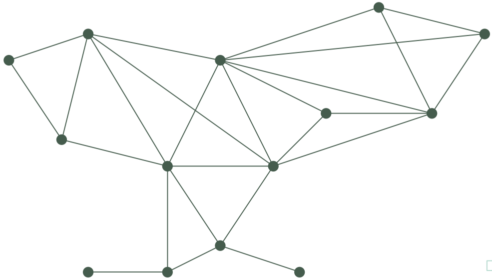
- *Graf je intervalový právě když neobsahuje žádný z následujících zakázaných indukovaných podgrafů:*



- *Jednoduchý graf je intervalový, právě když neobsahuje indukovanou kružnici C_4 a jeho doplněk má tranzitivní orientaci.*

9.2 Chordální grafy

Definice 9.5. **Chordální graf** (také zván *triangulovaný*) G je takový, který neobsahuje indukovanou kružnici delší než tři jako svůj podgraf.



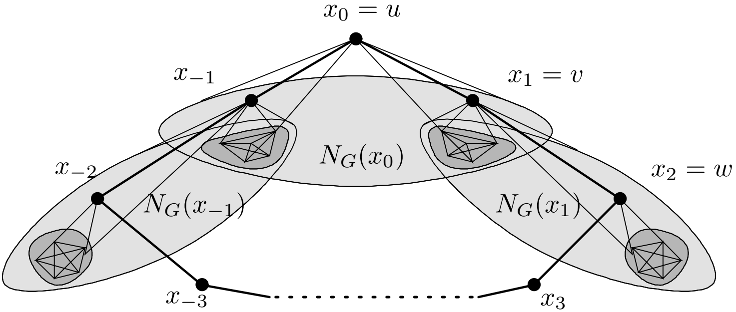
□

Věta 9.6. *Každý chordální graf G obsahuje simpliciální vrchol, tj. vrchol s takový, že všichni sousedé s tvoří kliku v G.* □

Důkaz: Dokazujeme posloupnost tří snadných tvrzení o chordálním grafu G.

Řekneme, že graf H je *bisimpliciální*, pokud H je úplný nebo H obsahuje dva nespojené simpliciální vrcholy.

1. Pro každou kružnici C a hranu e v chordálním grafu G existuje hrana f taková, že $E(C) \setminus \{e\} \cup \{f\}$ obsahuje trojúhelník. □
2. Nechť uv je hranou G a $N_G(v)$, tj. sousedé v, tvoří bisimpliciální podgraf v G. Pokud v je simpliciální mezi sousedy u, ale ne v celém G, pak existuje vrchol w spojený s v a nespojený s u takový, že w je simpliciální mezi sousedy v.
3. Tudíž pokud G není bisimpliciální, ale sousedé každého jeho vrcholu indukují bisimpliciální podgraf, pak G obsahuje kružnici C odporující bodu 1.
4. Tudíž G je bisimpliciální.



□

Simpliciální dekompozice

Přímým důsledkem Věty 9.6 je existence *simpliciální dekompozice* libovolného chordálního grafu:

Důsledek 9.7. *Vrcholy každého chordálního grafu G lze seřadit do posloupnosti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že každé v_i, $i = 2, \ldots, n$, je simpliciální v podgrafu G indukovaném na $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.* □

Fakt: Simpliciální dekompozici lze využít k efektivnímu rozpoznávání intervalových i chordálních grafů.

Průniková reprezentace

Věta 9.8. *Graf G je chordální právě když existuje strom T takový, že G je průnikovým grafem vhodné kolekce podstromů v T.* □

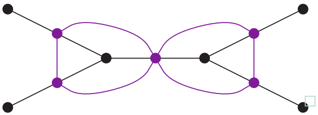
Důkaz (náznak): Ve směru doleva pouze stručně konstatujeme, že každý průnikový graf podstromů v nějakém stromě nutně musí být chordální. Naopak povedeme důkaz indukcí podle počtu vrcholů G, přičemž báze pro jeden vrchol je zřejmá.

Jinak nechť v je simpliciální vrchol chordálního grafu G. Indukcí sestrojíme průnikovou reprezentaci také chordálního grafu $G - v$. Pak sousedé v tvoří kliku, tudíž v průnikové reprezentaci grafu $G - v$ se v některém uzlu stromu všichni překrývají. Na tomto místě přidáme nový list stromu, který bude reprezentovat v a bude překryt reprezentanty sousedů v. □

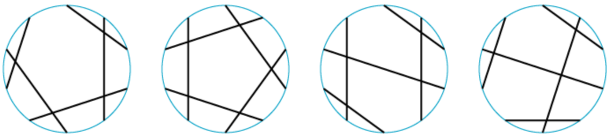
9.3 Další třídy průnikových grafů

Definice: Zavedeme následující třídy průnikových grafů:

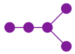
- *Hranový* graf $L(G)$ je průnikovým grafem hran $E(G)$ v běžném grafu G.



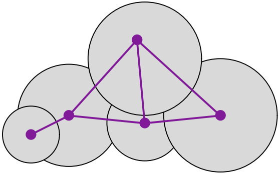
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici.
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.



P_4 C_5 P_4

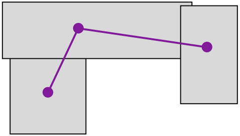


- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC).



□

- *Kvádrové* grafy (BOX) jsou průnikovými grafy kvádrů ve dvou, třech či více dimenzích, se stěnami rovnoběžnými se souřadnicemi.

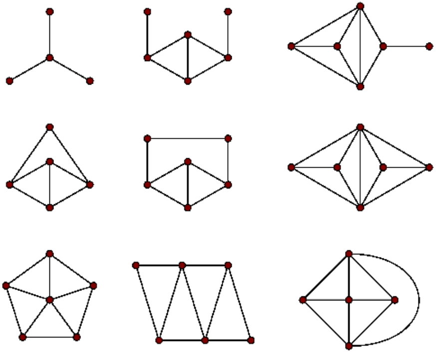


Složitost rozpoznávání

Častou a důležitou otázkou u (jakýchkoliv) typů reprezentací grafů je, které abstraktní grafy mají reprezentaci daného typu a jak lze takovou reprezentaci algoritmicky sestrojit. Problému se říká *rozpoznávání daného typu grafů*. □

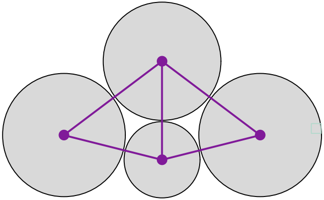
Věta 9.9. *Hranové, CA a CIR grafy lze rozpoznávat algoritmy v polynomiálním čase. Problémy, zda daný abstraktní graf je DISC nebo BOX, jsou NP-úplné.* □

Věta 9.10. *Daný graf je hranovým grafem nějakého jednoduchého grafu, právě když neobsahuje žádný z následujících indukovaných podgrafů:*



Jiné druhy reprezentace

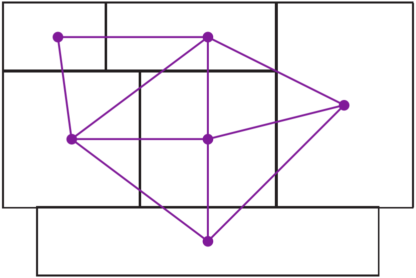
- *Dotykové* … grafy jsou variantou průnikových grafů geometrických objektů, ve které se požaduje, aby vnitřky objektů byly po dvou disjunktní.



Například [Koebe]:

Věta 9.11. *Graf je rovinný právě když je dotykovým grafem kruhů v rovině.*

- *Obdélníkové „duály“* – jedná se o průnikové dotykové reprezentace grafu pomocí nepřekrývajících se obdélníků se stranami rovnoběžnými osám.



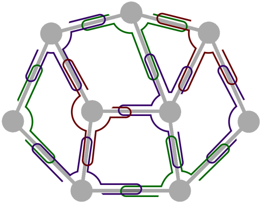
  - V této reprezentaci není dovoleno setkání čtyř obdélníků v jednom rohu. □
  - Ve striktním podání musí obdélníky reprezentace vyplnit plochu „bez děr“. □

Fakt: Pouze rovinné grafy mohou mít obdélníkový duál, avšak ne všechny rovinné mají. □

Navíc striktní obdélníkové duály vždy reprezentují *kvazitriangulace* (všechny stěny až na vnější jsou trojúhelníky).

9.4 Průnikové grafy křivek a úseček

Definice: *Křivkovými (niťovými) grafy* nazveme průnikové grafy obyč. křivek v rovině.



Tvrzení 9.12. *Každý rovinný graf je niťový.* □

Tvrzení 9.13. *Existují grafy, které jsou niťové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho vzájemných průsečíků.*

Složitost rozpoznávání

Co se týče algoritmické složitosti, je pak rozpoznání niťových grafů těžké. Vzhledem k Tvrzení 9.13 je mnohem obtížnější dokázat příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$, než jeho těžkost, viz [Kratochvíl / Schaeffer a Štefankovič].

Věta 9.14. *Problém rozpoznat, zda daný graf je niťový, je $\mathcal{NP}$-úplný.* □

Úsečky místo křivek

Velmi podobně je definována třída *úsečkových grafů*, což jsou průnikové grafy úseček v rovině. Opět je dokázáno, že jejich rozpoznávání je $\mathcal{NP}$-těžké [Kratochvíl], ale příslušnost problému do třídy $\mathcal{NP}$ zůstává otevřená kvůli následujícímu.

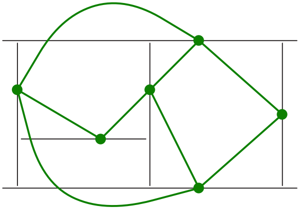
Tvrzení 9.15. *Existují grafy, které jsou úsečkové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje úsečku, k zápisu jejíž souřadnic je třeba exponenciálně mnoho bitů.* □

Ve srovnání s jednoduchým Tvrzením 9.12 vynikne tento docela dlouho otevřený problém, nedávno dořešený [Chalopin, Goncalves]:

Věta 9.16. *Každý rovinný graf je úsečkovým grafem.*

„Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotykových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotykové grafy úseček* v rovině:
Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.
(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)



□

Věta 9.17. *Graf je dotykovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.* □

Věta 9.18. *Problém rozpoznat dotykový graf úseček je $\mathcal{NP}$-úplný.* □