MA012 Statistika II

4. Testy dobré shody (goodness-of-fit tests)

Ondřej Pokora (pokora@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

(podzim 2015)

Motivace

Potřebujeme testovat nulovou hypotézu, že náhodný výběr $(X_1, \ldots, X_n)$ pochází z konkrétního rozdělení pravděpodobnosti:

- se zadanými parametry, např. $N(10; 4)$, $Ex(3{,}5)$, $Po(2)$, $Bi(10; 0{,}6)$,
- s neznámými parametry, např. N, Ex, Po, Bi,
- s konkrétně zadanou pravděpodobnostní funkcí, příp. hustotou.

Příklady použití:

- Parametrické testy vyžadují konkrétní typ rozdělení pravděpodobnosti náhodného výběru, např. T-test vyžaduje normnalitu. Jejich opomenutí může vést k nesprávným závěrům. Neparametrické (pořadové) testy předpoklad typu rozdělení nemají, ale mají menší sílu.
- ANOVA – normalita
- kontrola kvality – dodržování předepsaného rozdělení pravděpodobnosti
- kontrola generátorů náhodných čísel

Příklady

Příklad 1

Ze souboru rodin s pěti dětmi bylo náhodně vybráno 84 rodin a zjištěn počet chlapců.

počet chlapců	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
počet rodin	*3*	*10*	*22*	*31*	*14*	*4*

Na asympotické hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu, že počet chlapců v rodinách s 5 dětmi má binomické rozdělení $Bi(5;\ 0{,}5)$.

Příklad 2

Byla sledována doba (v minutách), jakou 70 klientů jisté firmy strávilo čekáním na obsluhu (od vyzvednutí pořadového lístku).

doba čekání	$(0; 3]$	$(3; 6]$	$(6; 9]$	$(9; 12]$	$(12; 15]$	$(15; 18]$	$(18; 21]$	$(21; 24]$
počet klientů	*14*	*16*	*10*	*9*	*8*	*5*	*3*	*5*

Na asympotické hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu, že doba čekání má exponenciální rozdělení pravděpodobnosti.

Empirické a teoretické četnosti

Definice 1 (Empirické = pozorované (Observed) četnosti)

Máme n předmětů $(X_1, \ldots, X_n)$, které rozdělujeme do k kategorií $A_1, \ldots, A_k$, přičemž každému z n předmětů odpovídá právě jedna kategorie.
Počty předmětů v jednotlivých kategoriích jsou **empirické četnosti** $N_1, \ldots, N_k$.

kategorie	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	součet
empirické četnosti	N_1	N_2	$\cdots$	N_k	n

Definice 2 (Teoretické = očekávané (Expected) četnosti)

Podle testovaného rozdělení pravděpodobnosti spočítáme teoretické pravděpodobnosti jevů, že jednotlivý předmět bude zařazen do kategorie A_j, $p_j = P(X \in A_j)$. Je-li rozdělovaných předmětů celkem n, jsou **teoretické četnosti** v jednotlivých kategoriích rovné $n\,p_j = n_j$.

kategorie	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	součet
pravděpodobnosti	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	1
teoretické četnosti	$n\,p_1$	$n\,p_2$	$\cdots$	$n\,p_k$	n

Jak porovnáme shodu empirického a teoretického rozdělení pravděpodobnosti?

Testovací statistika

kategorie	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	součet
empirické četnosti	N_1	N_2	$\cdots$	N_k	n
teoretické četnosti	$n\,p_1$	$n\,p_2$	$\cdots$	$n\,p_k$	n
pravděpodobnosti	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	1

Ideální shoda je, pokud všechny $N_j = n\,p_j$.
Jak zvolit statistiku pro testování shodnosti empirických a teoretických četností?

Testovací statistika

kategorie	A_1	A_2	$\cdots$	A_k	součet
empirické četnosti	N_1	N_2	$\cdots$	N_k	n
teoretické četnosti	$n\,p_1$	$n\,p_2$	$\cdots$	$n\,p_k$	n
pravděpodobnosti	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	1

Ideální shoda je, pokud všechny $N_j = n\,p_j$.
Jak zvolit statistiku pro testování shodnosti empirických a teoretických četností?

1. $N_1 - n\,p_1,\ \ldots,\ N_k - n\,p_k$
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(N_j - n\,p_j)$
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}|N_j - n\,p_j|, \qquad \sum_{j=1}^{k}(N_j - n\,p_j)^2$
4. $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\frac{(N_j - n\,p_j)^2}{p_j}, \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{(N_j - n\,p_j)^2}{p_j}$

Multinomické rozdělení pravděpodobnosti

Definice 3 (Multinomické rozdělení pravděpodobnosti)

Máme n $(X_1, \dots, X_n)$ předmětů k různých kategorií $A_1, \dots, A_k$.
Pravděpodobnost, že náhodně zvolený předmět X patří do kategorie A_j je rovna

$$p_j = P(X \in A_j) \in (0;1), \qquad j = 1, \dots, k, \qquad \text{přičemž } \sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$$

Počty (náhodné) předmětů v jednotlivých kategoriích označíme

$$N_j = \left|\left\{X_i \in A_j,\ i = 1, \dots, n\right\}\right|, \qquad j = 1, \dots, k, \qquad \text{přičemž } \sum_{j=1}^{k} N_j = n.$$

Sdružené rozdělení pravděpodobnosti vektoru $(N_1, \dots, N_k)$ je **multinomické**,

$$(N_1, \dots, N_k) \sim M(n; p_1, \dots, p_k).$$

Jedná se o diskrétní rozdělení se simultánní pravděpodobnostní funkcí

$$P(N_1 = n_1, \dots, N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k},$$

pro $n_j = 0, 1, \dots, n$ a $n_1 + \dots + n_k = n$.

Multinomické rozdělení pravděpodobnosti

Náhodný počet N_j předmětů v kategorii A_j má binomické rozdělení. Proč?

Věta 4

Pro $(N_1, \ldots, N_k) \sim M(n; p_1, \ldots, p_k)$ *platí:*

$$N_j \sim Bi(n, p_j), \qquad \mathrm{E}X_j = n\,p_j, \qquad \mathrm{D}X_j = n\,p_j(1 - p_j), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Moivreova-Laplaceova centrální limitní věta říká, že:

$$n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad U_j = \frac{N_j - n\,p_j}{\sqrt{n\,p_j(1 - p_j)}} \sim N(0;\ 1).$$

My však použijeme odlišné transformace:

$$Y_j = \frac{N_j - n\,p_j}{\sqrt{n\,p_j}}$$

Jakou střední hodnotu, rozptyl a asymptotické rozdělení pravděpodobnosti má Y_j?

Úprava testovací statistiky

$$Y_j = \frac{N_j - n\,p_j}{\sqrt{n\,p_j}} = \sqrt{1-p_j}\,U_j \overset{as.}{\sim} N(0;\ 1-p_j)$$

Upravujeme testovací statistiku:

$$K = \sum_{j=1}^{k} Y_j^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - n\,p_j)^2}{n\,p_j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{N_j^2}{n\,p_j} - 2\sum_{j=1}^{k} \frac{N_j\,n\,p_j}{n\,p_j} + \sum_{j=1}^{k} \frac{n^2 p_j^2}{n\,p_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{N_j^2}{n\,p_j} - 2\underbrace{\sum_{j=1}^{k} N_j}_{n} + n\underbrace{\sum_{j=1}^{k} p_j}_{1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{N_j^2}{n\,p_j} - n$$

Statistiku K lze zapsat jako součet kvadrátů k nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením, přičemž je dána jedna vazebná podmínka ($\sum_{j=1}^{k} N_j = n$). Za platnosti hypotézy shody empirického a teoretického rozdělení pravděpodobnosti má statistika K rozdělení χ^2 s $(k-1)$ stupni volnosti:

$$K = \sum_{j=1}^{k} Y_j^2 \overset{as.}{\sim} \chi^2(k-1), \qquad \mathrm{E}K = k-1$$

Test dobré shody

Věta 5 (Pearsonův test dobré shody)

Testovací statistika pro test dobré shody

$$K = \sum_{j=1}^{k} Y_j^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - n\,p_j)^2}{n\,p_j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{N_j^2}{n\,p_j} - n$$

má asymptotické rozdělení pravděpodobnosti $K \overset{as.}{\sim} \chi^2(k-1)$. *Hypotézu o shodě empirického a teoretického rozdělení pravděpodobnosti zamítáme, pokud*

$$K \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-1).$$

Uvedený test je asymptotický a lze jej proto provádět jen při dostatečně velkém rozsahu náhodného výběru. Často se uvádí

podmínka dobré aproximace

$$\text{Musí platit:} \qquad n\,p_j \geq 5\,q, \qquad j = 1, \dots, k,$$

$$\text{kde} \quad q = 1, \quad \text{anebo} \quad q = \frac{\left|\{j : n\,p_j < 5\}\right|}{k} \text{ (Yarnoldovo kritérium).}$$

Při nesplnění této podmínky je nutné kategorie A_j upravit – vhodně slučovat.

Test dobré shody v diskrétním rozdělení

1. Stanovíme kategorie $A_1, \ldots, A_k$ odpovídající všem možným jednotlivým výsledkům $t_1, \ldots, t_k$ uvažované diskrétní náhodné veličiny.
2. Pro jednotlivé kategorie spočítáme empirické četnosti

$$N_j = \left|\left\{X_i = t_j\right\}\right|$$

a teoretické četnosti pomocí pravděpodobnostní fce teoretického rozdělení,

$$n\,p_j = n\,P(X = t_j).$$

Lze příp. využít i distribučnáí funkce: $n\,p_j = n\left[F(t_j) - \lim_{t \to t_j^-} F(t)\right]$.

3. Ověříme podmínku dobré aproximace (Yarnoldovo kritérum), příp. upravíme kategorie jejich vhodným sloučením a podmínku znovu ověříme.
4. Spočítáme hodnotu testovací statistiky K.
5. Pokud $K \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$, zamítneme shodu empirického a teoretického rozdělení pravděpodobnosti. Číslo k je počet kategorií.

Řešení Příkladu 1

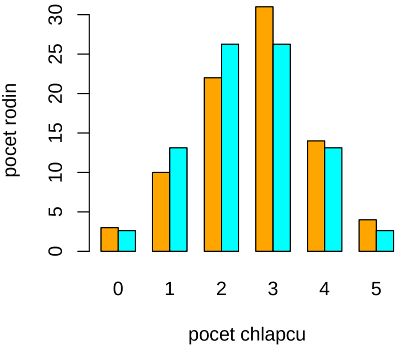
četnosti

```
  t.j N.j     p.j    n.j
1   0   3 0.03125  2.625
2   1  10 0.15625 13.125
3   2  22 0.31250 26.250
4   3  31 0.31250 26.250
5   4  14 0.15625 13.125
6   5   4 0.03125  2.625
```

Yarnoldovo kritérium

```
q <- sum (n * p.j < 5) / k
[1] 0.3333333

n * p.j >= 5 * q
[1] TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
   TRUE
```



Řešení Příkladu 1

test dobré shody

```
K <- sum (N.j^2 / (n * p.j)) - n
[1] 3.12381

qchisq (0.95, df = k - 1)
[1] 12.59159

K >= qchisq (0.95, df = k - 1)
[1] FALSE

1 - pchisq (K, df = k - 1)
[1] 0.6809048

chisq.test (N.j, p = p.j)
  Chi-squared test for given probabilities
data:  N.j
X-squared = 3.1238, df = 5, p-value = 0.6809
```

Řešení Příkladu 1

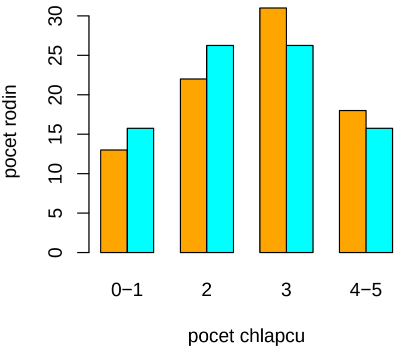
podmínka dobré aproximace

```
n * p.j >= 5
[1] FALSE  TRUE  TRUE  TRUE
   TRUE FALSE
```

četnosti ve sloučených kategoriích

```
  t.j2 N.j2   p.j2  n.j2
1  0-1   13 0.1875 15.75
2    2   22 0.3125 26.25
3    3   31 0.3125 26.25
4  4-5   18 0.1875 15.75
```

```
n * p.j2 >= 5
[1] TRUE TRUE TRUE TRUE
```



Řešení Příkladu 1

test dobré shody

```
K <- sum (N.j2^2 / (n * p.j2)) - n
[1] 2.349206

qchisq (0.95, df = k2 - 1)
[1] 7.814728

K >= qchisq (0.95, df = k2 - 1)
[1] FALSE
```

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme nulovou hypotézu, že počet chlapců v rodinách s 5 dětmi má rozdělení $Bi(5;\ 0{,}5)$.

Test dobré shody ve spojitém rozdělení

1. Stanovíme kategorie $A_1, \ldots, A_k$ jako třídicí intervaly
$$A_j = (t_{j-1},\ t_j], \qquad j = 1, \ldots, k,$$
pokrývající celou množinu výsledků teoretického rozdělení pravděpodobnosti tak, aby v každém intervalu ležel dostatečný počet hodnot z náhodného výběru $(X_1, \ldots, X_n)$. Pro malá n se můžeme volit $k \approx \sqrt{n}$ z konstrukce histogramu, pro $n > 80$ se doporučuje až $k \approx 15 \left(\frac{n}{100}\right)^{2/5}$ kategorií.
2. Pro jednotlivé kategorie spočítáme empirické četnosti
$$N_j = \left|\left\{t_{j-1} < X_i \le t_j\right\}\right|$$
a pomocí distribuční funkce F teoretického rozdělení pak teoretické četnosti
$$n\,p_j = n\,P(t_{j-1} < X \le t_j) = n\left[F(t_j) - F(t_{j-1})\right].$$
3. Ověříme podmínku dobré aproximace (Yarnoldovo kritérum), příp. upravíme – sloučíme některé intervaly a podmínku znovu ověříme.
4. Spočítáme hodnotu testovací statistiky K.
5. Pokud $K \ge \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$, zamítneme shodu empirického a teoretického rozdělení pravděpodobnosti. Číslo k je počet použitých intervalů.

Test dobré shody při neznámých parametrech

V případě, že testujeme shodu rozdělení pravděpodobnosti náhodného výběry $X_1, \ldots, X_n$ s teoretickým rozdělením pravděpodobnosti s neznámými parametry, používáme tzv. **modifikovanou metodou minimálního χ^2**.

Modifikovaná metoda minimálního χ^2

Označíme-li neznámé parametry $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, řešíme soustavu rovnic

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{N_j - n\, p_j(\boldsymbol{\theta})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Věta 6 (Pearsonův test dobré shody při neznámých parametrech)

Testovací statistika K pro test dobré shody má v případě m parametrů odhadnutých z náhodného výběru asymptotické rozdělení pravděpodobnosti $K \overset{as.}{\sim} \chi^2(k-1-m)$. Hypotézu o shodě empirického a teoretického rozdělení pravděpodobnosti zamítáme, pokud

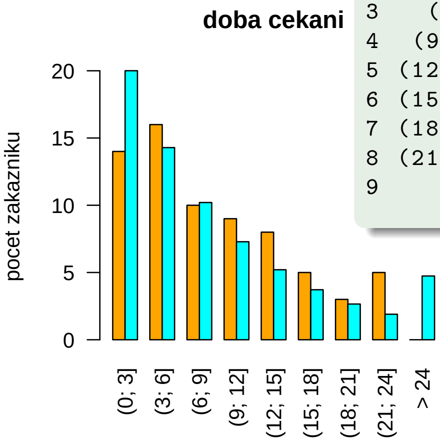
$$K \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-1-m).$$

Počet stupňů volnosti se tedy snižuje o počet odhadnutých parametrů.

Řešení Příkladu 2

Odhad parametru: $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$

	A.j	N.j	p.j	n.j
1	(0; 3]	14	0.28576159	20.003311
2	(3; 6]	16	0.20410190	14.287133
3	(6; 9]	10	0.14577742	10.204419
4	(9; 12]	9	0.10411983	7.288388
5	(12; 15]	8	0.07436638	5.205647
6	(15; 18]	5	0.05311533	3.718073
7	(18; 21]	3	0.03793701	2.655591
8	(21; 24]	5	0.02709607	1.896725
9	> 24	0	0.06772447	4.740713



Řešení Příkladu 2

podmínka dobré aproximace, Yarnoldovo kritérium

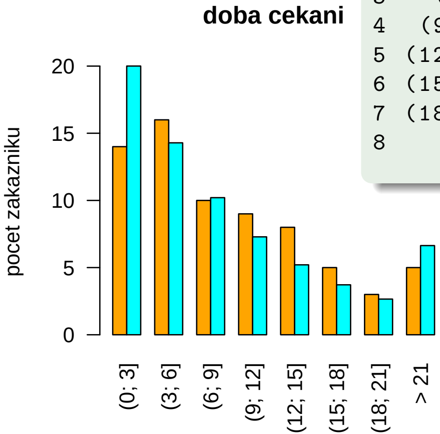
```
n * p.j >= 5
[1]  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE

q <- sum (n * p.j < 5) / k
[1] 0.4444444

n * p.j >= 5 * q
[1]  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE FALSE  TRUE
```

Podmínky nejsou splněny. Pro splnění podmínky dobré aproximace by bylo potřeba sloučit poslední 2 dvojice kategorií. Pro splnění Yarnoldova kritéria postačí sloučit poslední dvě kategorie.

Řešení Příkladu 2



	A.j2	N.j2	p.j2	n.j2
1	(0; 3]	14	0.28576159	20.003311
2	(3; 6]	16	0.20410190	14.287133
3	(6; 9]	10	0.14577742	10.204419
4	(9; 12]	9	0.10411983	7.288388
5	(12; 15]	8	0.07436638	5.205647
6	(15; 18]	5	0.05311533	3.718073
7	(18; 21]	3	0.03793701	2.655591
8	> 21	5	0.09482054	6.637438

Řešení Příkladu 2

Yarnoldovo kritérium po sloučení kategorií

```
q <- sum (n * p.j2 < 5) / k2
[1] 0.25

n * p.j2 >= 5 * q
[1] TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
```

test dobré shody ($df = k - 1 - m = 8 - 1 - 1 = 6$)

```
K <- sum (N.j2^2 / (n * p.j2)) - n
[1] 4.803687

qchisq (0.95, df = k2 - 1 - 1)
[1] 12.59159

K >= qchisq (0.95, df = k2 - 1 - 1)
[1] FALSE
```

Nezamítáme nulovou hypotézu o exponenciálním rozdělení dob čekání.

Test Poissonova rozdělení pravděpodobnosti

Nechť $(X_1, \ldots, X_n)$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení pravděpodobnosti $Po(\lambda)$ s neznámým parametrem λ.

$$\mathrm{X} \sim Po(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{EX} = \lambda, \qquad \mathrm{DX} = \lambda.$$

V Poissonově rozdělení je tedy střední hodnota rovna rozptylu.
Na této typické vlastnosti je založena jednoduchá testovací statistika.

Věta 7 (Jednoduchý test Poissonova rozdělení pravděpodobnosti)

Testovací statistika

$$Q = (n-1)\frac{S^2}{\overline{X}} \overset{as.}{\sim} \chi^2(n-1)$$

má v případě Poissonova rozdělení pravděpodobnosti náhodného výběru $(X_1, \ldots, X_n)$ *asymptotické rozdělení pravděpodobnosti* $\chi^2(n-1)$.
Hypotézu o shodě empirického rozdělení s Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti zamítáme, pokud

$$Q \leq \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \quad \textit{nebo} \quad Q \geq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1).$$

Test exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti

Nechť $(X_1, \ldots, X_n)$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti $Ex(\lambda)$ s neznámým parametrem λ.

$$\mathrm{X} \sim Ex(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{EX} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{DX} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

V exponenciálním rozdělení je tedy rozptyl rovný kvadrátu střední hodnoty. Na této typické vlastnosti je založena jednoduchá testovací statistika.

Věta 8 (Jednoduchý test exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti)

Testovací statistika

$$Q = (n-1)\frac{S^2}{\overline{X}^2} \overset{as.}{\sim} \chi^2(n-1)$$

má v případě exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti náhodného výběru $(X_1, \ldots, X_n)$ *asymptotické rozdělení pravděpodobnosti* $\chi^2(n-1)$.
Hypotézu o shodě empirického rozdělení s exponenciálního rozdělením pravděpodobnosti zamítáme, pokud

$$Q \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \quad \textit{nebo} \quad Q \ge \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1).$$

Řešení Příkladu 2

jednoduchý test exponenciálního rozdělení

```
X <- rep (prumer.j, N.j)
Q <- (n-1) * var (X) / (mean (X))^2
[1] 35.72647

q1 = qchisq (0.025, n-1)
q2 = qchisq (0.975, n-1)
[1] 47.92416 93.85647

Q <= q1 | Q >= q2
[1] TRUE
```

Nulovou hypotézu o exponenciálním rozdělení dob čekání jednoduchým testem zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Empirická distribuční funkce

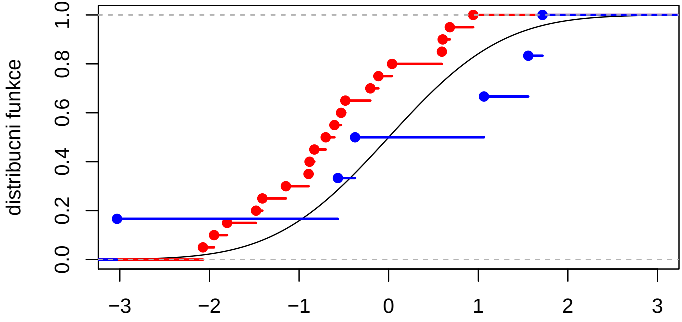
Definice 9 (Empirická distribuční funkce (ECDF))

Nechť $(X_1, \ldots, X_m)$ je náhodný výběr. Funkce

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{m} \left|\{i : X_i \leq x\}\right| = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \xi_i(x), \qquad \text{kde } \xi_i = \begin{cases} 1, & X_i \leq x \\ 0, & X_i > x \end{cases},$$

se nazývá **empirická distribuční funkce**.

Empirická distribuční funkce je schodovitá, zprava spojitá funkce.



Kolmogorovův-Smirnovův test

Porovnáváme dva stochasticky nezávislé náhodné výběry

- $(X_1, \ldots, X_m)$ rozsahu m z rozdělení psti. s distribuční funkcí $F(x)$,
- $(Y_1, \ldots, Y_n)$ rozsahu n z rozdělení psti. s distribuční funkcí $G(y)$.

z rozdělení pravděpodobnosti spojitého typu.
Testujeme hypotézu, že distribuční funkce těchto dvou rozdělení jsou shodné (mediánem i tvarem), tj. že všech $m+n$ náhodných veličin pochází ze stejného rozdělení, proti alternativě rozdílných distribučních funkcí (v jakémkoliv smyslu),

$$H_0 : F = G \qquad\qquad H_1 : F \neq G.$$

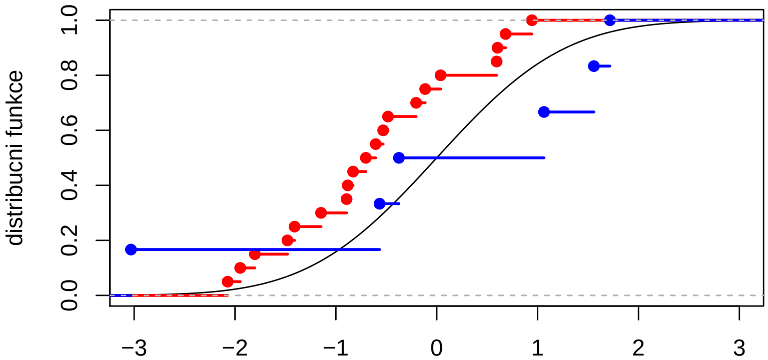
Lze ukázat, že s rostoucím rozsahem m náhodného výběru se empirická distribuční funkce blíží ke skutečné distribuční funkci, z níž náhodný výběr pochází.

Nechť $\widehat{F}(x)$ je empirická distribuční funkce X-ového výběru a $\widehat{G}(y)$ je empirická distribuční funkce Y-ového výběru. Označíme

$$D = \sup\left\{\left|\widehat{F}(x) - \widehat{G}(x)\right|;\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Jaký geometrický význam má testovací statistika D?

Kolmogorovův-Smirnovův test



Věta 10 (Dvouvýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test)

Hypotézu H_0 *zamítáme, pokud*

$$D \geq D_\alpha(m,n), \qquad \textit{resp. pokud } \; m+n>35 \; \textit{ a } \; D \geq \sqrt{\frac{m+n}{2\,m\,n}\,\ln\frac{2}{\alpha}}.$$

Číslo $D_\alpha(m,n)$ je tabelovaná kritická hodnota K-S testu.

Kolmogorovův-Smirnovův test

Můžeme také testovat hypotézu, že distribuční funkce F, z níž pochází náhodný výběr $(X_1, \ldots, X_n)$ je rovna jedné konkrétně zvolené distribuční funkci F_0, např. $N(10;4)$, $Ex(3{,}5)$, $Po(2)$, $Bi(10;0{,}6)$,

$$H_0 : F = F_0 \qquad\qquad H_1 : F \neq F_0.$$

Označíme

$$D = \sup\left\{\left|\widehat{F}(x) - F_0(x)\right|;\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Věta 11 (Jednovýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test)

Hypotézu H_0 zamítáme, pokud

$$D \geq D_\alpha(n), \qquad \textit{resp. pokud} \ \ n \geq 30 \ \ \textit{a} \ \ D \geq \sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}}.$$

Číslo $D_\alpha(n)$ je tabelovaná kritická hodnota jednovýběrového K-S testu.

Lillieforsova varianta K-S testu normality

Testujeme hypotézu, že náhodný výběr $(X_1, \ldots, X_n)$ pochází z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámými parametry.

Nejprve odhadneme parametry $\widehat{\mu} = \overline{X}$, $\widehat{\sigma} = \sqrt{S^2}$. Test je založen na statistice

$$D = \sup \left\{ \left| \widehat{F}(x) - \Phi\left(\frac{x - \widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}}\right) \right| ;\; x \in \mathbb{R} \right\},$$

kde Φ značí distribuční funkci $N(0;1)$ rozdělení.

Věta 12 (test normality)

Hypotézu o tom, že náhodný výběr $(X_1, \ldots, X_n)$ pochází rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ zamítáme, pokud

$$D \geq D_\alpha(n).$$

Číslo $D_\alpha(n)$ je tabelovaná kritická hodnota Lillieforsova testu.

Testy normality (v R)

D'Agostinův test (založený na šikmosti a špičatosti)	`agostino.test(X)`	$*$
Jarqueův-Beraův test (založený na šikmosti a špičatosti)	`jarque.test(X)`	$*$
Andersonův-Darlingův test (založený na transformaci na rovnoměrné rozdělení)	`ad.test(X)`	$\star$
Lillieforsův test (varianta Kolmogorovova-Smirnovova testu)	`lillie.test(X)`	$\star$
Cramérův-von Misesův test (alternativa Kolmogorovova-Smirnovova testu)	`cvm.test(X)`	$\star$
test dobré shody (odhady μ, σ^2 modifikovanou metodou minimálního χ^2)	`pearson.test(X)`	$\star$
Shapirův-Wilkův test	`shapirotest(X)`	
Kolmogorovův-Smirnovův test (μ, σ^2 známé)	`ks.test(X,"pnorm",mean=,sd=)`	
Q-Q plot s kvantily normálního rozdělení	`qqnorm(X)`, `qqline(X)`	
N-P plot		

$*$ `library (moments)`, $\star$ `library (nortest)`

Shrnutí

- empirické a teoretické četnosti, jejich porovnání
- test dobré shody, využití, výpočet testovací statistiky
- úprava stupňů volnosti testu dobré shody při odhadnutých parametrech
- volba kategorií pro diskrétní a pro spojité náhodné veličiny
- jednoduché testy pro Poissonovo a exponenciální rozdělení pravděpodobnosti
- Kolmogorovův-Smirnovův test, význam testovací statistiky, Lillieforsovův test normality
- přehled testů normality

K zamyšlení (nebo simulaci v R)

Máme náhodný výběr $(X_1, \ldots, X_n)$ z nějakého libovolně zvoleného rozdělení pravděpodobnosti (např. $N(0;\ 1)$, $Ex(2{,}5)$, apod.) s distribuční funkcí $F(x)$. Provedeme transformaci $Y_i = F(X_i)$. Jaké rozdělení pravděpodobnosti odpovídá transformovanému náhodnému vektoru $(Y_1, \ldots, Y_n)$?